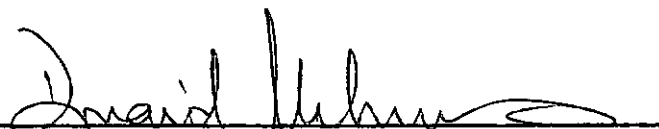


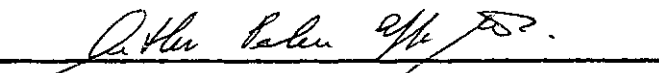
LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA DE MANCAIS RADIAIS POROSOS

Otasito Sanches Tavares

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovado por:


Duraid Mahrus
Presidente


Arthur P. Ripper Neto


Ralph Skelton

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
DEZEMBRO DE 1974

A meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor DURaid MAHRUS pela motivação, orientação e estímulo recebidos.

À COPPE e CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho tem a finalidade de investigar as características de operação dos mancais radiais finitos porosos sob cargas estáticas.

Uma solução analítica é apresentada e os resultados relacionam a razão de excentricidade, o ângulo de atitude, as dimensões e os parâmetros de carga, de atrito e de projeto do mancal, sendo este último, função da permeabilidade da matriz porosa.

ABSTRACT

The performance of finite porous journal bearings under static loads is investigated.

An analytical solution is presented and the results relate the eccentricity ratio, the attitude angle, the geometry and the load, friction and design parameters, the latter being a function of the permeability of the porous matrix.

ÍNDICE

Capítulos:		Páginas:
I	INTRODUÇÃO	1
II	HISTÓRICO	3
III	TEORIA	4
	3.1 Introdução	4
	3.2 Fluxo de Fluidos em Meios Porosos	6
	3.2.1 Porosidade e Permeabilidade	6
	3.2.2 Lei de Darcy	6
	3.2.3 Equação de Laplace	9
	3.3 Solução da Equação de Laplace	10
	3.4 Equações Para a Película de Óleo	19
	3.4.1 Hipóteses Simplificativas	19
	3.4.2 Equação da Continuidade	20
	3.4.3 Equação de Reynolds Modificada	22
	3.5 Solução da Equação de Reynolds Modifi_	
	cada	28
	3.6 Parâmetro de Carga	34
	3.7 Ângulo de Atitude	37
	3.8 Parâmetro de Atrito	38
IV	CÁLCULO NUMÉRICO	40
	4.1 Elementos Necessários à Solução da Equa_	

Capítulos:	Páginas:
ção (3.52)	40
4.2 Programa Para Computador	44
4.2.1 Generalidades	44
4.2.2 Diagramas de Fluxo	48
V RESULTADOS	52
VI CONCLUSÕES	60
6.1 Validade da Solução	60
6.2 Aplicabilidade dos Resultados	61
BIBLIOGRAFIA	63
NOMENCLATURA	65
APÊNDICE I	70
APÊNDICE II	72
APÊNDICE III	74

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os mancais porosos são atualmente muito usados, devido, principalmente, ao baixo custo e à necessidade mínima de manutenção.

São produzidos pela compactação parcial de pós metálicos (geralmente ligas de bronze ou ferro), seguida de sinterização e posterior prensagem para garantir precisão dimensional e melhor acabamento superficial. A porosidade depende, principalmente, do grau de compactação. Após o processo de fabricação o mancal é impregnado com óleo lubrificante.

Vantagens: Os mancais porosos não necessitam bombas de óleo ou recipientes contendo óleo, de modo que podem ser usados, particularmente, em locais de pouco espaço ou de difícil acesso nas máquinas. Como não possuem ranhuras ou furos para alimentação do lubrificante, são aptos a trabalharem com cargas rotativas ou aplicadas em mais de uma direção. Outras vantagens importantes são a necessidade mínima de manutenção e a disponibilidade, a baixo custo, de uma extensa faixa de medidas padronizadas.

Como são fabricados por sinterização, acumulam ainda todas as vantagens do processo, ou seja:

- É possível o uso de metais de alta temperatura de fu são, quando a fundição torna-se pouco prática;
- Pode-se utilizar ligas metálicas que não são obtidas por fusão, devido a problemas de segregação;
- Lubrificante sólido pode ser adicionado na composição, o que permite uma maior vida útil do mancal, principalmente, em casos de uso descontínuo da máquina.

Limitações: A principal limitação é a baixa resistência mecânica, devido à porosidade. Diminuindo-se a porosida de, melhora a resistência mecânica, porém, a vida útil do mancal ficará reduzida devido a menor quantidade de óleo disponível.

Devido, também, à porosidade, o mancal possui menor condutibilidade térmica, o que acarreta maiores temperaturas de funcionamento e oxidação prematura do óleo lubrificante.

Outra desvantagem é a impossibilidade de usinagem da superfície interna do mancal, o que provocaria o fechamento dos poros na superfície.

CAPÍTULO II

HISTÓRICO

O primeiro trabalho teórico sobre o assunto foi publicado por Cameron e Morgan em 1957. Porém, a suposição de que o gradiente de pressão ao longo da espessura do material poroso variasse linearmente com a espessura e o uso impróprio de condições de contorno nas bordas do mancal, fez com que os resultados fossem aplicáveis somente a mancais de espessura muito pequena em relação ao comprimento.

Trabalhos mais rigorosos foram apresentados por W.T. ROULEAU ¹, que usou a aproximação do mancal infinitamente curto, por Shir e Joseph, que consideraram o mancal infinitamente longo e por Tipei, que encontrou a solução para mancal finito considerando pequena espessura de parede.

Finalmente, C. CUSANO ², obteve solução analítica para um mancal poroso finito, sendo os resultados apresentados para uma espessura de parede de $0.15D$, onde D é o diâmetro interno do mancal.

Do ponto de vista prático deve ser citado o trabalho de V.T. MORGAN ³.

CAPÍTULO III

TEORIA

3.1 - INTRODUÇÃO

A operação dos mancais radiais porosos é semelhante a dos mancais comuns, isto é, baseia-se na formação de uma cunha de óleo, a qual gera a pressão que sustenta a carga. Sua diferença reside na capacidade de absorção de óleo pela matriz porosa, característica essa que irá influir nos parâmetros de funcionamento tais como, capacidade de carga, espessura de película, etc.

O eixo é sólido e a matriz porosa é ajustada externamente a uma armadura sólida, de modo a aumentar a resistência e não permitir fluxo de óleo para fora do mancal na direção radial. As faces laterais da matriz porosa são livres (Figura 3.1).

A experiência tem demonstrado que mancais porosos lubrificados somente pelo óleo inicial com que foram impregnados trabalharão a lubrificação por camada limite (boundary lubrication), a menos que as velocidades sejam médias ou elevadas e a

carga seja pequena. Nestes casos e também quando o óleo inicial é complementado por uma fonte externa, o mancal poderá operar em condições hidrodinâmicas de lubrificação. Nestas condições é possível a investigação teórica de suas grandezas de funcionamento.

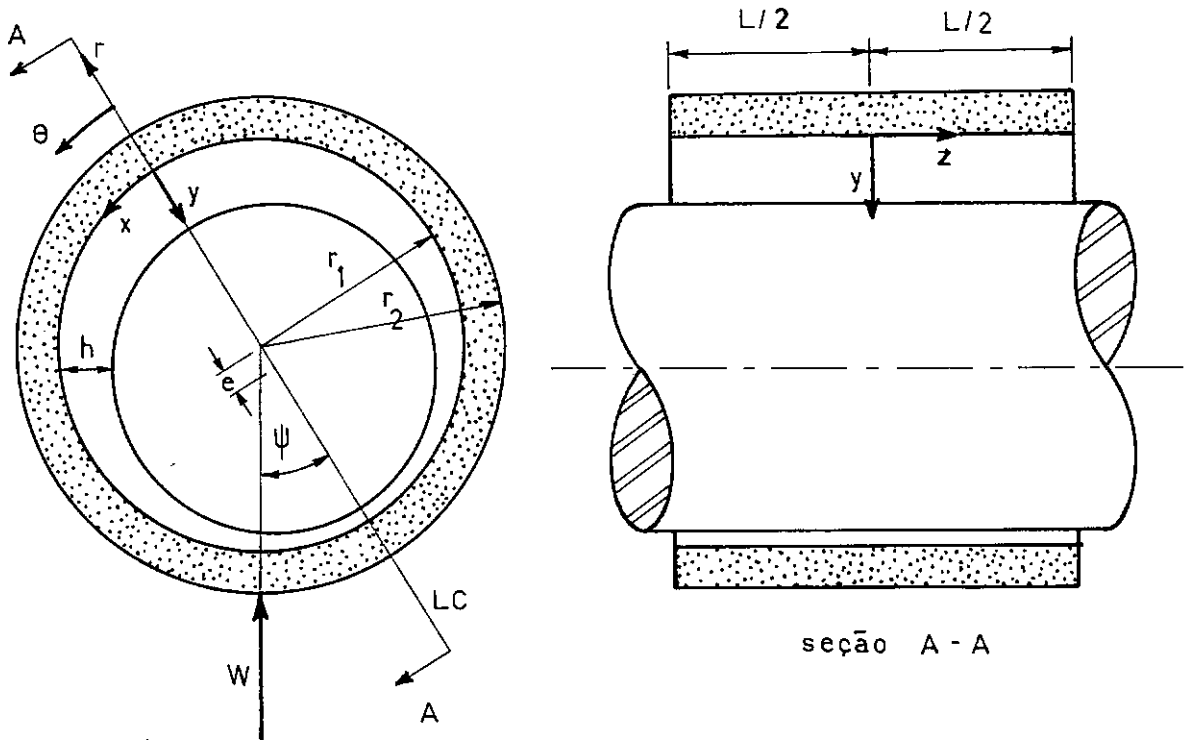


FIG. 3.1 - GEOMETRIA DO MANCAL RADIAL POROSO E SISTEMAS DE COORDENADAS UTILIZADOS

3.2 - FLUXO DE FLUIDOS EM MEIOS POROSOS

3.2.1 - Porosidade e Permeabilidade.

Define-se porosidade como a fração de volume do material correspondente aos espaços vazios em sua estrutura:

$$\phi_t = \frac{\text{volume dos poros}}{\text{volume total}} = \frac{V_P}{V_T}$$

A porosidade, como definida acima, é também chamada de porosidade total ou absoluta.

Denomina-se porosidade efetiva quando V_p abrange somente o volume dos poros interconectados.

Permeabilidade de um material poroso é a propriedade que caracteriza a facilidade com que um fluido pode se deslocar através do material quando um gradiente de pressão é aplicado. A permeabilidade depende da porosidade efetiva e do tipo de estrutura do material poroso.

3.2.2 - Lei de Darcy.

Seja um elemento de volume cilíndrico tomado no flu

xo de um fluido viscoso e incompressível, através de um material poroso (Figura 3.2):

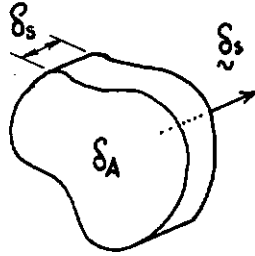


Figura 3.2

O fluxo é considerado laminar, a viscosidade do fluido é constante, o material poroso é isotrópico e, os efeitos de inércia e gravidade, são desprezíveis em comparação com as forças viscosas.

A força viscosa agindo sobre o fluido contido no elemento de volume na direção δ_s será:

$$F_v = - \eta \cdot B \cdot \delta_A \cdot \underline{v} \cdot \underline{\delta}_s$$

onde B é uma constante que depende da geometria dos poros.

A força na direção δ_s devido ao gradiente de pressão pode ser expressa por:

$$F_p = - \phi \cdot \delta_A \cdot \nabla p \cdot \underline{\delta}_s$$

Para um fluxo em regime permanente, estas forças de
vem estar em equilíbrio:

$$(\nabla p + \eta \frac{B}{\phi} \underline{v}) \cdot \underline{\delta}_s \cdot \phi \cdot \delta_A = 0$$

Como a equação acima deve ser verificada para qual
quer orientação do elemento de volume, conclui-se que:

$$\nabla p + \eta \frac{B}{\phi} \underline{v} = 0$$

Dai resulta a lei de Darcy:

$$\underline{v} = - \frac{k}{\eta} \nabla p \quad (3.1)$$

onde $k = \phi/B$ é a permeabilidade do material poroso.

Deve-se ressaltar que esta dedução é apenas aproximada, pois as grandezas relativas ao material poroso são tomadas como valores médios em elementos finitos do material poroso e, portanto, carecem de sentido quando as dimensões tornam-se infinitesimais. Porém, experiências práticas comprovam a lei de Darcy, com exceção dos casos em que as velocidades são bastante elevadas ou o tamanho dos poros se aproximam das dimensões moleculares do lubrificante.

3.2.3 - Equação de Laplace.

Pela equação (3.1), as componentes da velocidade do fluido no material poroso podem ser expressas por:

$$v_x = - \frac{k}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.2)$$

$$v_y = - \frac{k}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

$$v_z = - \frac{k}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (3.4)$$

Substituindo-se na equação da continuidade para o meio poroso (é semelhante à equação 3.34) as derivadas obtidas das equações (3.2), (3.3) e (3.4), resulta:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (3.5)$$

Esta é a equação de Laplace para o meio poroso, que escrita em coordenadas cilíndricas (Apêndice I) fica:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (3.6)$$

3.3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

As condições de contorno a serem utilizadas são:

$$p(r, \theta, L/2) = p(r, \theta, -L/2) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p(r, \theta, 0)}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

$$p(r_1, 0, z) = p(r_1, 2\pi, z) = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p(r_2, \theta, z)}{\partial r} = 0 \quad (3.10)$$

$$p(r_1, \theta, z) = \hat{p}(\theta, z) \quad (3.11)$$

A equação (3.7) mostra que as faces laterais da matriz porosa estão em contato com a atmosfera, cuja pressão foi tomada como nula por conveniência.

A equação (3.8) é obtida considerando-se simetria da distribuição de pressão na direção z .

A equação (3.9) mostra a periodicidade da solução. Usando-se essas condições de contorno, uma parte da distribuição de pressão será negativa e, exceto para cargas muito pequenas,

ocorre cavitação e o filme se rompe. Entretanto, a equação (3.9) pode ser utilizada para a obtenção de uma solução aproximada, desprezando-se então a parte negativa do perfil de pressão no cálculo da capacidade de carga do mancal.

A equação (3.10) decorre do fato de ser a matriz porosa ajustada externamente a uma armadura impermeável, de modo a não permitir fluxo de óleo para fora do mancal na direção radial.

A equação (3.11) afirma a existência de continuidade da pressão na interface entre a matriz porosa e o filme de óleo.

Pelo método de separação de variáveis, considera-se a solução como sendo do tipo:

$$p(r, \theta, z) = R(r) \cdot \theta(\theta) \cdot Z(z) \quad (3.12)$$

Substituindo-se esta expressão na equação (3.6) e dividindo-se por $R \cdot \theta \cdot Z$, vem:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\theta''}{\theta} = - \frac{Z''}{Z}$$

Nesta equação, o primeiro membro depende de r e θ , enquanto o segundo membro é função apenas da variável z . Por tanto, ambos os membros devem ser iguais a uma constante:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\theta''}{\theta} = - \frac{Z''}{Z} = \lambda^2 \quad (3.13)$$

Daí obtem-se o problema de autovalores:

$$Z'' + \lambda^2 \cdot Z = 0$$

com as condições de contorno ditadas pelas equações (3.7) e (3.8):

$$Z(-L/2) = Z(L/2) = 0$$

$$Z'(0) = 0$$

Este problema tem para solução os autovalores:

$$\lambda_m = \frac{\pi}{L} (2m - 1) \quad (3.14)$$

e as respectivas autofunções:

$$Z_m(z) = C \cdot \cos(\lambda_m z) \quad (3.15)$$

com $m = 1, 2, 3, \dots$

Multiplicando-se a equação (3.13) por r^2 , vem:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - \lambda_m^2 r^2 = - \frac{\theta''}{\theta}$$

Nesta equação, o primeiro membro depende de r , enquanto o segundo depende de θ . A igualdade implica que ambos os membros devem ser iguais a uma constante:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - \lambda_m^2 r^2 = - \frac{\theta''}{\theta} = \alpha^2 \quad (3.16)$$

Dai se origina o problema de autovalores:

$$\theta'' + \alpha^2 \cdot \theta = 0$$

com as condições de contorno fornecidas pela equação (3.9):

$$\theta(0) = \theta(2\pi) = 0$$

Este problema tem por solução os autovalores $\alpha_n = n/2$. Porém, com esses autovalores a solução converge para um perfil circunferencial de pressão que se anula em $\theta = \pi$.

Resultado idêntico é conseguido considerando-se "a priori" $\theta(\pi) = 0$ como condição de contorno, com as vantagens de ser a convergência bem mais rápida e o cálculo das funções de Bessel mais simples.

O segundo caso será considerado, sendo os autovalores:

$$\alpha_n = n \quad (3.17)$$

e as respectivas autofunções:

$$\theta_n(\theta) = D \cdot \text{sen} \alpha_n \theta \quad (3.18)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$

Substituindo-se o valor de α_n dado pela equação (3.17) na equação (3.16) e, a seguir multiplicando-se por R , vem:

$$r^2 R'' + r R' - (\lambda_m^2 r^2 + n^2) R = 0$$

Esta é a equação de Bessel modificada de ordem n , cuja solução é expressa por:

$$R_{nm}(r) = c_{nm} \cdot I_n(\lambda_m r) + d_{nm} \cdot K_n(\lambda_m r) \quad (3.19)$$

Substituindo-se as equações (3.15), (3.18) e (3.19) na equação (3.12), a solução da equação de Laplace pode ser escrita como:

$$p(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_{nm} \cdot I_n(\lambda_m r) + b_{nm} \cdot K_n(\lambda_m r) \right] \\ \times \sin(n\theta) \cdot \cos(\lambda_m z) \quad (3.20)$$

Aplicando-se a condição de contorno (3.10), vem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_{nm} \cdot I'_n(\lambda_m r_2) + b_{nm} \cdot K'_n(\lambda_m r_2) \right] \lambda_m \\ \times \sin(n\theta) \cdot \cos(\lambda_m z) = 0 \quad (3.21)$$

As funções $\sin(n\theta)$, $n = 1, 2, \dots$, formam uma base no espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, formam uma base em $C[0, 2\pi]$, pois são autofunções relativas a autovalores distintos (ver o teorema 12-7 da ref. 7). Logo, qualquer função $\theta(\theta)$ deste espaço, pode ser expressa em série infinita nessa base. Da mesma forma as funções $\cos(\lambda_m z)$, $m = 1, 2, \dots$, formam uma base em $C[-L/2, L/2]$. Portanto, os produtos $\sin(n\theta) \cdot \cos(\lambda_m z)$ formam uma base em $C[S]$, onde S é a região definida por $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $-L/2 \leq z \leq L/2$ (ver o teorema 9-7 da ref. 7).

Então a expressão (3.21) representa o desenvolvimento em série de Fourier da função nula e daí se conclui que todos os coeficientes desse desenvolvimento serão nulos, isto é:

$$\left[a_{nm} \cdot I'_n(\lambda_m r_2) + b_{nm} \cdot K'_n(\lambda_m r_2) \right] \lambda_m = 0$$

$\lambda_m \neq 0$, logo:

$$b_{nm} = - a_{nm} \frac{I'_n(\lambda_m r_2)}{K'_n(\lambda_m r_2)} \quad (3.22)$$

As funções de Bessel obedecem às seguintes relações:

$$I'_n(u) = \frac{I_{n-1}(u) + I_{n+1}(u)}{2} \quad (3.23)$$

$$K'_n(u) = \frac{K_{n-1}(u) + K_{n+1}(u)}{2} \quad (3.24)$$

Substituindo-se essas relações com o argumento $\lambda_m r_2$ na equação (3.22) e levando-se o resultado na equação (3.20), obtem-se:

$$p(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \left[I_n(\lambda_m r) + \frac{I_{n-1}(\lambda_m r_2) + I_{n+1}(\lambda_m r_2)}{K_{n-1}(\lambda_m r_2) + K_{n+1}(\lambda_m r_2)} \cdot K_n(\lambda_m r) \right] \times \sin(n\theta) \cdot \cos(\lambda_m z) \quad (3.25)$$

Derivando-se esta equação em relação a r , usando-se as relações (3.23) e (3.24) e, a seguir, aplicando-se a equação resultante à face interna da matriz porosa ($r=r_1$), chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(r_1, \theta, z)}{\partial r} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{2} \left\{ I_{n-1}(\lambda_m r_1) + I_{n+1}(\lambda_m r_1) \right. \\ & - \frac{I_{n-1}(\lambda_m r_2) + I_{n+1}(\lambda_m r_2)}{K_{n-1}(\lambda_m r_2) + K_{n+1}(\lambda_m r_2)} \cdot \left[K_{n-1}(\lambda_m r_1) \right. \\ & \left. \left. + K_{n+1}(\lambda_m r_1) \right] \right\} \lambda_m \cdot \sin(n\theta) \cdot \cos(\lambda_m z) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tomando-se

$$\beta_m = \lambda_m \cdot \frac{L}{2} = \pi(m - \frac{1}{2}) \quad (3.27)$$

$$\bar{z} = \frac{z}{L/2} \quad (3.28)$$

$$p' = \frac{c^2}{r_1 \eta U} \cdot p \quad (3.29)$$

as equações (3.25) (para $r = r_1$) e (3.26) podem ser reescritas sob a forma adimensional:

$$p'(r_1, \theta, \bar{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e_{nm} \cdot A_{nm} \cdot \text{sen}(n\theta) \cdot \cos(\beta_m \bar{z}) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial p'(r_1, \theta, z)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e_{nm} \cdot B_{nm} \cdot \text{sen}(n\theta) \cdot \cos(\beta_m \bar{z}) \quad (3.31)$$

onde:

$$A_{nm} = I_n(u_1) + \frac{I_{n-1}(u_2) + I_{n+1}(u_2)}{K_{n-1}(u_2) + K_{n+1}(u_2)} \cdot K_n(u_1) \quad (3.32)$$

$$B_{nm} = \frac{\beta_m}{L} \left\{ I_{n-1}(u_1) + I_{n+1}(u_1) - \frac{I_{n-1}(u_2) + I_{n+1}(u_2)}{K_{n-1}(u_2) + K_{n+1}(u_2)} \right. \\ \left. \times \left[K_{n-1}(u_1) + K_{n+1}(u_1) \right] \right\} \quad (3.33)$$

$$e_{nm} = \frac{c^2}{r_1 \eta U} \cdot a_{nm}$$

com $u_1 = \beta_m D_1 / L$

$u_2 = \beta_m D_2 / L.$

3.4 - EQUAÇÕES PARA A PELÍCULA DE ÓLEO

3.4.1 - Hipóteses Simplificativas.

- (1) O fluido lubrificante é considerado incompressível;
- (2) Serão desprezadas as forças externas (gravitacionais, etc);
- (3) A pressão é considerada constante através da espessura da película do lubrificante ($\partial \hat{p} / \partial y = 0$);
- (4) A espessura do filme de óleo é muito pequena em comparação com as dimensões do mancal, de modo que pode ser desprezada a curvatura do filme. Desta forma as velocidades serão todas lineares;
- (5) O lubrificante é newtoniano;
- (6) O fluxo é laminar;
- (7) Não existem fontes nem sumidouros de fluido;
- (8) Os efeitos de inércia serão desprezados;
- (9) Não há deslizamento entre o lubrificante e as superfícies de contato, isto é, a velocidade do óleo em contato com a superfície pode ser tomada como a velocidade da superfície. Esta hipótese acarreta uma descontinuidade nas componentes de velocidades tangenciais e axiais do fluxo de óleo na interface entre a matriz porosa e o filme de óleo. Tal des

continuidade ocorre porque, na matriz porosa, a velocidade do óleo é proporcional ao gradiente de pressão. Entretanto, a descontinuidade é aceitável, já que os efeitos de inércia foram desprezados, tanto na película de óleo como na matriz porosa;

- (10) A viscosidade do lubrificante é considerada constante;
- (11) O mancal trabalha em regime permanente, isto é, as grandezas envolvidas não variam com o tempo;
- (12) Em comparação com os gradientes de velocidade $\partial v_x / \partial y$ e $\partial v_z / \partial y$, todos os outros gradientes de velocidade podem ser desprezados. Esta consideração é válida, já que v_x e, em seguida v_z , são as velocidades predominantes e as dimensões na direção y são muito menores que as dimensões nas direções x e z ;
- (13) Há alinhamento perfeito entre o mancal e o eixo, de modo que a espessura de película do lubrificante é função apenas da variável x .

3.4.2 - Equação da Continuidade.

Seja um elemento de volume de arestas dx , dy e dz , tão pequeno que as velocidades do fluido nas direções x , y e z

possam ser consideradas constantes, através de cada face do elemento (Figura 3.3):

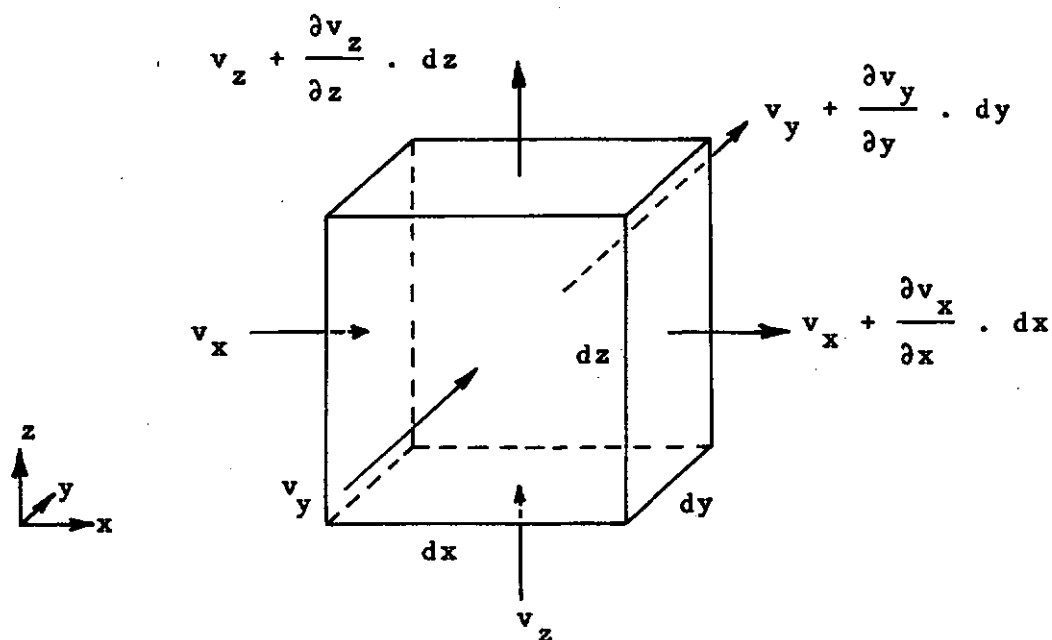


Figura 3.3.

Elemento de volume tomado no filme de óleo.

Considerando-se as hipóteses (1) e (7), o fluxo que entra deverá ser igual ao fluxo que sai do elemento:

$$\begin{aligned}
 v_x \cdot dy \cdot dz + v_y \cdot dx \cdot dz + v_z \cdot dx \cdot dy &= (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx) dy \cdot dz + (v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy) dx \cdot dz \\
 &+ (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dz) dx \cdot dy.
 \end{aligned}$$

Daí vem:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.34)$$

3.4.3 - Equação de Reynolds Modificada.

De acordo com as hipóteses (2), (3) e (8), as forças que agem sobre um elemento de fluido são representadas na Figura 3.4.

Do equilíbrio de forças nas direções x e z, resulta;

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad (3.36)$$

Considerando-se as hipóteses (5) e (12):

$$\tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \approx \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

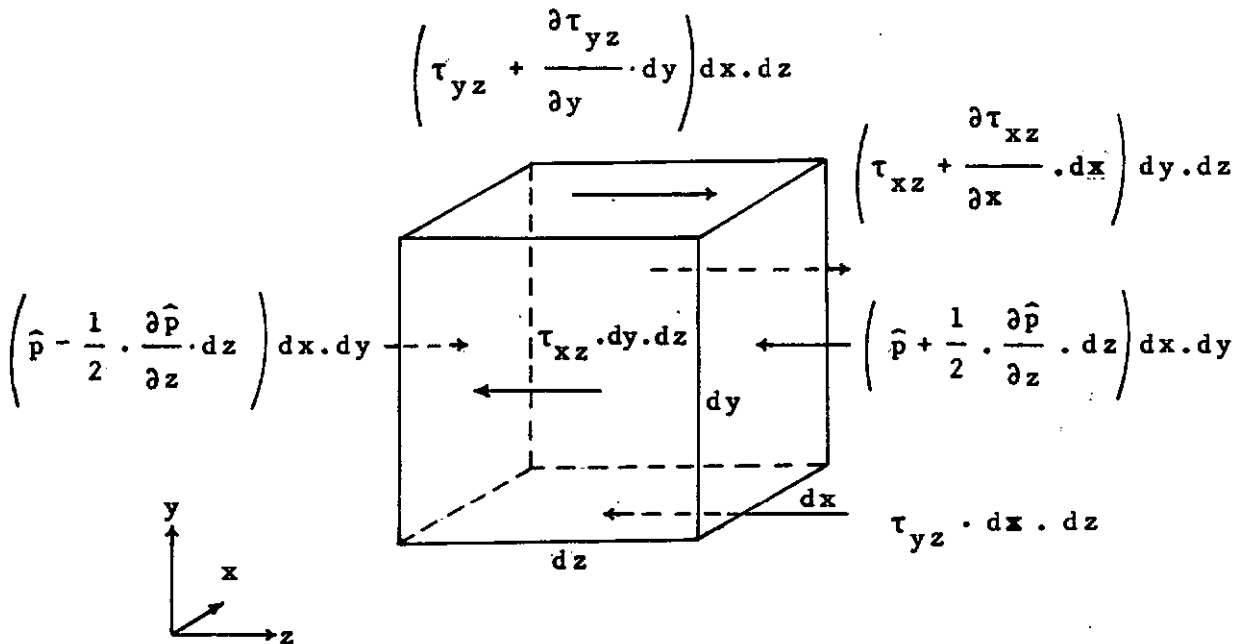
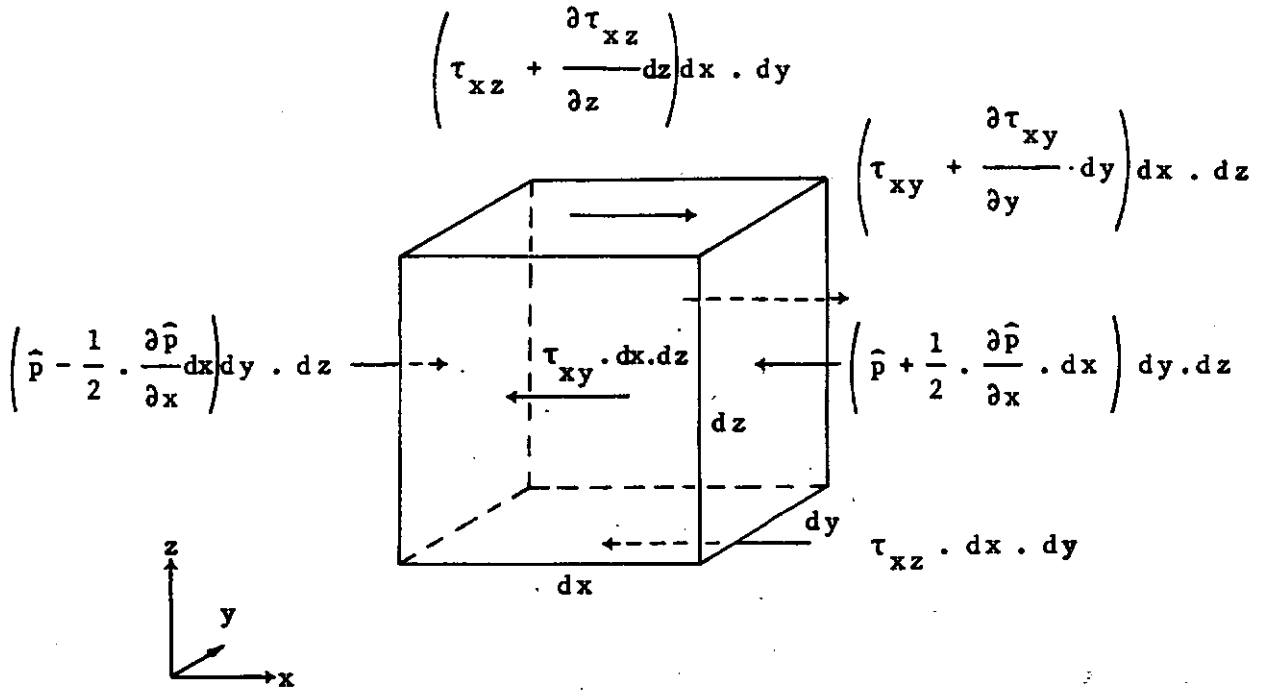


Figura 3.4

Forças que agem sobre um elemento de fluido nas direções x e z .

$$\tau_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \equiv 0$$

$$\tau_{yz} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \equiv \eta \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

Substituindo-se nas equações (3.35) e (3.36), vem:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad (3.38)$$

Integrando-se duas vezes a equação (3.37) com as condições de contorno:

$$v_x = 0 \quad \text{para} \quad y = 0$$

$$v_x = U \quad \text{para} \quad y = h$$

e utilizando-se a hipótese (10) chega-se a:

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \cdot y(y-h) + \frac{y}{h} U. \quad (3.39)$$

Procedendo-se de forma análoga com a equação (3.38) e as condições de contorno:

$$v_z = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad y = h$$

resulta:

$$v_z = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \cdot y(y-h) \quad (3.40)$$

Substituindo-se as expressões (3.39) e (3.40) na equação (3.34), obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial y} = & -\frac{1}{2\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \cdot y(y-h) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \cdot y(y-h) \right] \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{h} U \right). \end{aligned}$$

Integrando-se, de acordo com a hipótese (13), vem:

$$v_h - v_0 = \frac{1}{12\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) + \frac{1}{12\eta} \cdot$$

$$h^3 \cdot \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + \frac{U}{2} \cdot \frac{dh}{dx} \quad (3.41)$$

Porém, a velocidade tangencial U do eixo, possui com ponente na direção y (Figura 3.5):

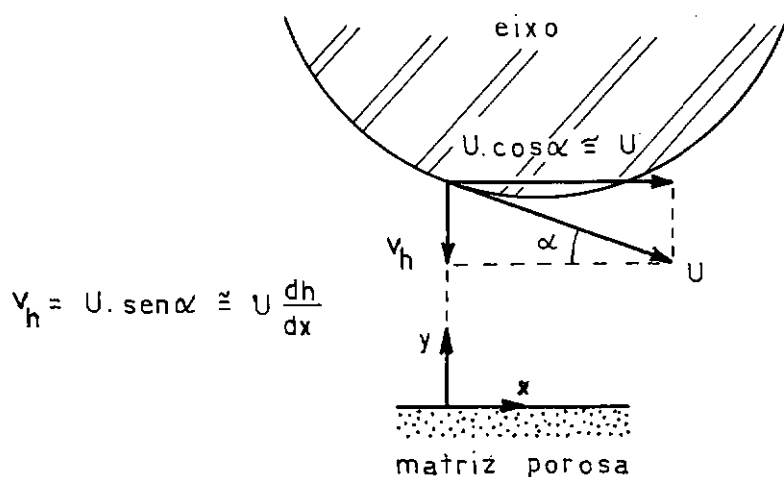


Figura 3.5

v_0 é a velocidade com que o fluido deixa a matriz porosa na direção y . Portanto, a velocidade v_0 pode ser expres sa através da equação (3.3):

$$v_0 = - \frac{k}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Substituindo-se os valores de v_h e v_0 na equação (3.41) e lembrando-se que:

$$x = r_1 \cdot \theta$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=0} = - \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_1}$$

$$h = c(1 + \epsilon \cdot \cos\theta) \quad (\text{Apêndice II}).$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon \cos\theta)^3 & \left[\frac{c^2}{U \eta r_1} \cdot \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \theta^2} + r_1^2 \frac{c^2}{U \eta r_1} \cdot \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} \right] \\ & - 3 \epsilon \sin\theta \cdot (1 + \epsilon \cos\theta)^2 \cdot \frac{c^2}{U \eta r_1} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} \\ & + 6 \epsilon \sin\theta + 12 \cdot \frac{kr_1}{U \eta c} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0 \quad (3.42) \end{aligned}$$

Considerando-se os grupos adimensionais definidos pelas equações (3.28) e (3.29) e tomando-se ainda

$$p^* = \frac{c^2}{r_1 \eta U} \cdot \hat{p} \quad (3.43)$$

$$\phi = \frac{r_1 k}{c^3} \quad (3.44)$$

a equação (3.42) ficará:

$$(1 + \epsilon \cos \theta)^3 \left[\frac{\partial^2 p^*}{\partial \theta^2} + \left(\frac{D_1}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 p^*}{\partial \bar{z}^2} \right] - 3 \epsilon \sin \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^2 \times \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + 6 \epsilon \sin \theta + 12 \phi r_1 \left(\frac{\partial p^*}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0 \quad (3.45)$$

Esta é a equação de Reynolds modificada (pois foi considerado o fluxo de óleo na matriz porosa) e adimensionalizada, em coordenadas cilíndricas, cuja solução fornecerá a distribuição de pressão no filme de óleo.

3.5 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS MODIFICADA

Substituindo-se a equação (3.31) na equação (3.45), vem:

$$\ell(p^*) = (1 + \epsilon \cos \theta)^3 \left[\frac{\partial^2 p^*}{\partial \theta^2} + \left(\frac{D_1}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 p^*}{\partial \bar{z}^2} \right] - 3 \epsilon \sin \theta (1 + \epsilon \cos \theta)^2 \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + 6 \epsilon \sin \theta +$$

$$\begin{aligned}
 & + 6 \phi \frac{D_1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e_{nm} \cdot E_{nm} \cdot \text{sen}(n\theta) \cdot \\
 & \times \cos(\beta_m \bar{z}) = 0
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde ℓ representa o operador diferencial agindo sobre p^* e $E_{nm} = L \cdot B_{nm}$.

As condições de contorno para o filme de óleo serão tomadas em concordância com as usadas para a superfície interna da matriz porosa, isto é:

$$p^*(\theta, 1) = p^*(\theta, -1) = 0 \tag{3.47}$$

$$p^*(0, \bar{z}) = p^*(\pi, \bar{z}) = p^*(2\pi, \bar{z}) = 0 \tag{3.48}$$

A solução da equação (3.45), que satisfaz tais condições, pode ser expressa através da série de Fourier:

$$p^*(\theta, \bar{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm} \cdot Q_{nm}(\theta, \bar{z}) \tag{3.49}$$

onde as funções $Q_{nm}(\theta, \bar{z})$ formam uma base na região definida por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-1 \leq \bar{z} \leq 1$, satisfazendo as condições de contorno (3.47) e (3.48) e q_{nm} são coeficientes indeterminados.

Examinando-se a seção 3.3, vê-se que os produtos $\text{sen}(n\theta) \cdot \cos(\beta_m \bar{z})$ formam uma base na mesma região e satisfazem as condições de contorno (3.47) e (3.48). Para que também seja satisfeita a condição de contorno (3.11), os coeficientes q_{nm} serão tomados como:

$$q_{nm} = e_{nm} \cdot A_{nm} \quad (\text{ver equação 3.30})$$

Então a equação (3.49) pode ser escrita na forma:

$$p^*(\theta, \bar{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e_{nm} \cdot A_{nm} \cdot \text{sen}(n\theta) \cdot \cos(\beta_m \bar{z}) \quad (3.50)$$

$\ell(p^*)$ é uma função contínua identicamente nula. Como a função nula é ortogonal a todas as funções da base, seu produto interno com qualquer função da base é nulo, isto é:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \ell(p^*) \cdot \text{sen}(j\theta) \cdot \cos(\beta_k \bar{z}) \cdot d\theta \cdot d\bar{z} = 0 \quad (3.51)$$

Substituindo-se a equação (3.50) na equação (3.46) e levando-se a seguir o valor de $\ell(p^*)$ obtido para a equação (3.51), chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \left[-(\epsilon^3 \cdot \cos^3 \theta + 3 \cdot \epsilon^2 \cdot \cos^2 \theta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3 \cdot \epsilon \cdot \cos \theta + 1) \cdot \left(n^2 + \frac{D_1^2}{L^2} \cdot \beta_m^2 \right) + 6 \phi \frac{D_1}{L} \frac{E_{nm}}{A_{nm}} \right] \right. \\
& \quad \times \sin(n\theta) \cdot \cos(\beta_m \bar{z}) - 3 \cdot \epsilon \cdot n (\epsilon^2 \cdot \cos^2 \theta + 2 \cdot \epsilon \cdot \cos \theta \\
& \quad \left. \left. + 1) \cdot \sin \theta \cdot \cos(n\theta) \cdot \cos(\beta_m \bar{z}) \right\} \cdot \sin(j\theta) \\
& \quad \times \cos(\beta_k \bar{z}) \cdot d\theta \cdot d\bar{z} = - \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} 6 \cdot \epsilon \cdot \sin \theta \\
& \quad \times \sin(j\theta) \cdot \cos(\beta_k \bar{z}) \cdot d\theta \cdot d\bar{z}
\end{aligned}$$

onde $C_{nm} = e_{nm} \cdot A_{nm}$.

Na equação acima, todos os termos do primeiro membro são dependentes da variável \bar{z} , através do produto $\cos(\beta_m \bar{z}) \times \cos(\beta_k \bar{z})$. Quando for efetuada a integração, serão todos nulos, exceto para $m=k$. Portanto, a equação pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \left[-(\epsilon^3 \cdot \cos^3 \theta + 3 \cdot \epsilon^2 \cdot \cos^2 \theta + 3 \cdot \epsilon \cdot \cos \theta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 1) \cdot (n^2 + \frac{D_1^2}{L^2} \cdot \beta_k^2) + 6 \phi \frac{D_1}{L} \frac{E_{nk}}{A_{nk}} \right] \right. \\
& \quad \times \sin(n\theta) \cdot \cos(\beta_k \bar{z}) - 3 \cdot \epsilon \cdot n (\epsilon^2 \cdot \cos^2 \theta + 2 \cdot \epsilon \cdot \cos \theta \\
& \quad \left. \left. + 1) \cdot \sin \theta \cdot \cos(n\theta) \cdot \cos(\beta_k \bar{z}) \right\} \cdot \sin(j\theta) \\
& \quad \times \cos(\beta_k \bar{z}) \cdot d\theta \cdot d\bar{z} = - \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} 6 \cdot \epsilon \cdot \sin \theta \\
& \quad \times \sin(j\theta) \cdot \cos(\beta_k \bar{z}) \cdot d\theta \cdot d\bar{z}.
\end{aligned}$$

A integração desta equação fornece:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} \cdot F_{nkj} = H_{kj} \quad (3.52)$$

onde:

$$\begin{aligned}
F_{nkj} = & \pi \cdot \left[n^2 + \left(\frac{D_1}{L} \right)^2 \cdot \beta_k^2 \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) \cdot \delta_{nj} + \frac{3\epsilon}{2} \right. \\
& \times \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4} \right) \cdot (\delta_{1,n-j} + \delta_{1,j-n}) + \frac{3\epsilon^2}{4} \cdot (\delta_{2,n-j} \\
& + (\delta_{2,j-n} - \delta_{2,n+j}) + \frac{\epsilon^3}{8} \cdot (\delta_{3,n-j} + \delta_{3,j-n} \\
& \left. - \delta_{3,n+j}) \right] + n \cdot \pi \cdot \left[\frac{3\epsilon}{2} \cdot \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4} \right) \cdot (\delta_{1,j-n} - \delta_{1,n-j}) \right. \\
& + \frac{3\epsilon^2}{2} \cdot (\delta_{2,n+j} + \delta_{2,j-n} - \delta_{2,n-j}) + \frac{3\epsilon^2}{8} \\
& \times (\delta_{3,n+j} + \delta_{3,j-n} - \delta_{3,n-j}) \left. \right] - 6 \cdot \pi \cdot \frac{D_1}{L} \\
& \times \phi \cdot G_{nk} \cdot \delta_{nj} \tag{3.53}
\end{aligned}$$

com $G_{nk} = \frac{E_{nk}}{A_{nk}}$

$$H_{kj} = 24 \cdot \epsilon \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cdot \delta_{1,j} \tag{3.54}$$

Atribuindo-se valores de 1 a L para n e j, a equação (3.52) fornece, para cada valor de k, L equações a L incógnitas (C_{nk}).

Fazendo-se k variar de 1 a M, resulta então um conjunto de M matrizes L x L. A solução desse conjunto de matrizes fornece os valores dos coeficientes C_{nk} desejados.

3.6 - PARÂMETRO DE CARGA

A capacidade de carga do mancal é calculada, através da integração da pressão no filme de óleo.

Na parte negativa do perfil da pressão ocorrerá cavitação e rompimento da película lubrificante, de modo que esta parte do perfil será desprezada no cálculo da capacidade de carga, isto é, a integração será efetuada apenas para $0 \leq \theta \leq \pi$. Além disso, considerando-se a simetria da distribuição de pressão em relação à variável z, a componente da capacidade de carga na direção da linha dos centros pode ser expressa da seguinte forma:

$$W_0 = - W \cdot \cos \psi = - 2 r_1 \cdot \int_0^{L/2} \int_0^{\pi} \hat{p}(\theta, z) \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot dz$$

Usando-se as equações (3.28) e (3.43), vem:

$$W_0 = \eta UL (r_1/c)^2 \cdot W_1 \quad (3.55)$$

onde:

$$W_1 = - \int_0^1 \int_0^\pi p^* \cdot \cos\theta \cdot d\theta \cdot d\bar{z} \quad (3.56)$$

Substituindo-se a equação (3.50) na equação (3.56) e integrando-se, resulta:

$$W_1 = - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cdot \frac{n}{n^2-1} \quad (3.57)$$

com $C_{nk} = e_{nk} \cdot A_{nk}$.

A componente da capacidade de carga na direção perpendicular à linha dos centros vale:

$$W_p = W \cdot \sin\psi = 2 r_1 \cdot \int_0^{L/2} \int_0^\pi \hat{p}(\theta, z) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot dz \quad (3.58)$$

Aplicando-se as equações (3.28) e (3.43), vem:

$$W_p = \eta UL(r_1/c)^2 \cdot W_2 \quad (3.59)$$

onde:

$$W_2 = \int_0^1 \int_0^\pi p^* \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\bar{z} \quad (3.60)$$

Substituindo-se a equação (3.50) na equação (3.60) e integrando-se, resulta:

$$W_2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_{1k} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \quad (3.61)$$

É de uso prático o parâmetro de carga definido como o inverso do número de Sommerfeld:

$$\frac{1}{S} = \frac{P}{\eta N} \cdot \frac{c}{r_1^2} \quad (3.62)$$

(Obs.: Alguns autores consideram esta expressão como o número de Sommerfeld).

onde:

$$P = \frac{W}{2 L r_1} \quad (3.63)$$

A capacidade de carga é expressa por:

$$W = (W_0^2 + W_p^2)^{1/2}$$

Usando-se as equações (3.57) e (3.59), vem:

$$W = 2\pi N r_1 L \eta (r_1/c)^2 \cdot (W_1^2 + W_2^2)^{1/2} \quad (3.64)$$

com $U = 2\pi N r_1$, onde, por simplicidade, foi confundido o raio do eixo com o raio interno da matriz porosa.

Substituindo-se a equação (3.64) na equação (3.63) e levando-se o resultado para a equação (3.62), obtem-se a expressão final do parâmetro de carga:

$$\frac{1}{S} = \pi (W_1^2 + W_2^2)^{1/2} \quad (3.65)$$

3.7 - ÂNGULO DE ATITUDE

É calculado por:

$$\psi = \arctg(W_2/W_1) \quad (3.66)$$

3.8 - PARÂMETRO DE ATRITO

Para um fluido newtoniano:

$$\tau_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Derivando-se a equação (3.39) em relação a y , substituindo-se na equação acima e tomando-se $y = h$ (superfície do eixo), vem:

$$\tau_x = \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\eta U}{h}$$

Considerando-se o filme de óleo completo (0 a 2π) e tomando-se o raio do eixo como o raio interno da matriz porosa, a força de arrasto será:

$$F = 2 r_1 \cdot \int_0^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau_x \cdot d\theta \cdot dz$$

Integrando-se, mediante o uso das equações (3.58), (A2.2) e $x = r_1 \cdot \theta$, resulta:

$$F = \frac{c \epsilon W \operatorname{sen} \psi}{2 r_1} + \frac{2 \pi \eta U \cdot r_1 \cdot L}{c (1 - \epsilon^2)^{1/2}} \quad (3.67)$$

Usando-se as equações (3.67) e (3.63) e lembrando-se que $U = 2 \pi N r_1$, o coeficiente de atrito pode ser expresso por:

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{c \epsilon}{2 r_1} \cdot \operatorname{sen} \psi + \frac{\eta N}{P} \frac{r_1}{c} \frac{2 \pi^2}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}}$$

Multiplicando-se por r_1/c , tem-se a expressão do parâmetro de atrito:

$$\mu \frac{r_1}{c} = \frac{\epsilon}{2} \cdot \operatorname{sen} \psi + \frac{2 \pi^2 S}{(1 - \epsilon^2)^{1/2}} \quad (3.68)$$

sendo S definido pela equação (3.62).

CAPÍTULO IV

CÁLCULO NUMÉRICO

4.1 - ELEMENTOS NECESSÁRIOS À SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (3.52)

Os parâmetros de operação dos mancais radiais porosos, tais como parâmetros de carga e de atrito e ângulo de atitude, são funções apenas dos coeficientes C_{nk} , os quais podem ser determinados através da equação (3.52). Antes, porém, devem ser calculados os termos F_{nkj} e H_{kj} , sendo os últimos facilmente determinados pela equação (3.54).

Para o cálculo dos termos F_{nkj} (ver equação 3.53), necessita-se conhecer G_{nk} :

$$G_{nk} = \frac{E_{nk}}{A_{nk}} = \frac{L \cdot B_{nk}}{A_{nk}}$$

Usando-se as equações (3.32) e (3.33) e, em seguida, multiplicando-se numerador e denominador por:

$$K_{n-1} \left(\beta_k \frac{D_2}{L} \right) + K_{n+1} \left(\beta_k \frac{D_2}{L} \right),$$

resulta:

$$\begin{aligned} G_{nk} = \beta_k \left\{ \left[I_{n-1}(u_1) + I_{n+1}(u_1) \right] \cdot \left[K_{n-1}(u_2) + K_{n+1}(u_2) \right] \right. \\ \left. - \left[I_{n-1}(u_2) + I_{n+1}(u_2) \right] \cdot \left[K_{n-1}(u_1) + K_{n+1}(u_1) \right] \right\} \\ + \left\{ I_n(u_1) \cdot \left[K_{n-1}(u_2) + K_{n+1}(u_2) \right] + \left[I_{n-1}(u_2) \right. \right. \\ \left. \left. + I_{n+1}(u_2) \right] \cdot K_n(u_1) \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde:

$$u_1 = \beta_k \frac{D_1}{L} \quad e \quad u_2 = \beta_k \frac{D_2}{L}$$

Variando-se n de 1 a L , pela expressão de G_{nk} vê-se que, para cada valor de k , necessita-se das funções de Bessel I e K de ordens 0 a $L+1$, com os argumentos u_1 e u_2 .

As funções de Bessel modificadas obedecem às seguintes leis de recorrência:

$$I_{f+1}(u) = I_{f-1}(u) - \frac{2f}{u} \cdot I_f(u) \quad (4.2)$$

$$K_{f+1}(u) = K_{f-1}(u) + \frac{2f}{u} \cdot K_f(u) \quad (4.3)$$

Portanto, basta conhecer I_0 , I_1 , K_0 , K_1 com os argumentos u_1 e u_2 . As demais funções de Bessel, para um mesmo valor de k , serão calculadas usando-se as relações (4.2) e (4.3) repetidas vezes.

As funções de Bessel I_0 , I_1 , K_0 e K_1 são calculadas através das séries:

$$I_0(u) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u/2)^{2m}}{(m!)^2} \quad (4.4)$$

$$I_1(u) = \frac{u}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u/2)^{2m+1}}{(m+1)(m!)^2} \quad (4.5)$$

$$K_0(u) = -\ln(u/2) - \gamma - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u/2)^{2m}}{(m!)^2} \cdot \left[\ln(u/2) - T(m+1) \right] \quad (4.6)$$

$$K_1(u) = \frac{1}{2} + \frac{u}{2} \cdot \left[\ln(u/2) + \gamma - \frac{1}{2} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(u/2)^{2m+1}}{(m+1)(m!)^2} \times \left[\ln(u/2) - T(m+1) - \frac{1}{2(m+1)} \right] \quad (4.7)$$

onde:

$$T(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$$

com $m = 1, 2, 3, \dots$ e $T(1) = -\gamma$.

sendo $\gamma = -0,577215 \dots$ a constante de Euler.

Porém, para $u \gg 1$, tais séries convergem muito lentamente, sendo conveniente neste caso o uso de desenvolvimentos assintóticos:

$$I_0(u) = \frac{e^u}{(2\pi u)^{1/2}} \cdot \left[1 + \sum_{m=2}^M \frac{1^2 \dots (2m-3)^2}{(m-1)! (8u)^{m-1}} \right] \quad (4.8)$$

$$I_1(u) = \frac{e^u}{(2\pi u)^{1/2}} \cdot \left\{ 1 + \sum_{m=2}^M (-1)^{m-1} \cdot \frac{(4-1^2) \dots [4-(2m-3)^2]}{(m-1)! (8u)^{m-1}} \right\} \quad (4.9)$$

$$K_0(u) = e^{-u} \cdot \left(\frac{\pi}{2u} \right)^{1/2} \cdot \left[1 + \sum_{m=2}^M (-1)^{m-1} \cdot \frac{1^2 \dots (2m-3)^2}{(m-1)! (8u)^{m-1}} \right]$$

(4.10)

$$K_1(u) = e^{-u} \cdot \left(\frac{\pi}{2u} \right)^{1/2} \cdot \left\{ 1 + \sum_{m=2}^M \frac{(4 - 1^2) \dots |4 - (2m - 3)^2|}{(m - 1)! (8u)^{m-1}} \right\} \quad (4.11)$$

Serão usados os desenvolvimentos assintóticos no cálculo de I_0 e I_1 quando $u \geq 10$ e no cálculo de K_0 e K_1 quando $u \geq 6$. Esses valores foram encontrados experimentalmente, calculando-se as funções de Bessel através das equações (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) e verificando-se a partir de que valor do argumento a convergência não era satisfatória.

Os termos dos desenvolvimentos assintóticos inicialmente diminuem em valor absoluto e, após determinado número de termos, passam a aumentar, isto é, as séries divergem após determinado número de termos e têm, portanto, precisão limitada. Para que a máxima precisão seja obtida, somam-se os termos até que o termo de menor valor absoluto seja alcançado.

4.2 - PROGRAMA PARA COMPUTADOR

4.2.1 - Generalidades.

Para a representação das funções de Bessel de ordem

n no programa FORTRAN, usou-se n+1 como índice das variáveis indexadas (ver nomenclatura), porque tais índices não podem ser nulos ou negativos. Consequentemente, as leis de recorrência das funções de Bessel, equações (4.2) e (4.3), ficarão:

$$BIA(N+2) = BIA(N) - 2.*N/(BETA*D1L)*BIA(N+1) \quad (4.12)$$

$$BIB(N+2) = BIB(N) - 2.*N/(BETA*D2L)*BIB(N+1) \quad (4.13)$$

$$BKA(N+2) = BKA(N) + 2.*N/(BETA*D1L)*BKA(N+1) \quad (4.14)$$

$$BKB(N+2) = BKB(N) + 2.*N/(BETA*D2L)*BKB(N+1) \quad (4.15)$$

com $N = 1, 2, 3, \dots$

A expressão de G_{nk} (equação 4.1) para o cálculo computacional será:

$$\begin{aligned} G(N,K) = & BETA*((BIA(N) + BIA(N+2))*(BKB(N) + BKB(N+2)) \\ & - (BIB(N) + BIB(N+2))*(BKA(N) + BKA(N+2)))/ \\ & / (BIA(N+1)*(BKB(N) + BKB(N+2)) + (BIB(N) \\ & + BIB(N+2))*BKA(N+1)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

O programa utiliza três subrotinas:

Subrotina BESS - calcula as funções de Bessel $I_0(u)$, $I_1(u)$, $K_0(u)$ e $K_1(u)$ para $u < 6$ ou, apenas, $I_0(u)$ e $I_1(u)$ quando $6 \leq u < 10$. São usadas as equações (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7), sendo que o argumento u assume os valores $\beta_k \frac{D_1}{L}$ e $\beta_k \frac{D_2}{L}$.

Subrotina BASS - calcula as funções de Bessel $I_0(u)$, $I_1(u)$, $K_0(u)$ e $K_1(u)$ para $u \geq 10$ ou, apenas $K_0(u)$ e $K_1(u)$ quando $6 \leq u < 10$. Tais funções são calculadas através das equações (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11), sendo que o argumento u assume os valores $\beta_k \frac{D_1}{L}$ e $\beta_k \frac{D_2}{L}$.

Subrotina SIMQ - consta do arquivo de subrotinas científicas do computador e é utilizada para resolver os sistemas de equações lineares resultantes da equação (3.52). A resolução é feita pelo método de Gauss-Jordan.

O programa pode ser dividido em três partes:

- Cálculo dos termos G_{nk} ;
- Cálculo dos coeficientes C_{nk} ;
- Cálculo dos parâmetros de operação do mancal.

Na primeira parte, faz-se uso das subrotinas BASS e BESS para o cálculo das funções de Bessel I_0 , I_1 , K_0 e K_1 com

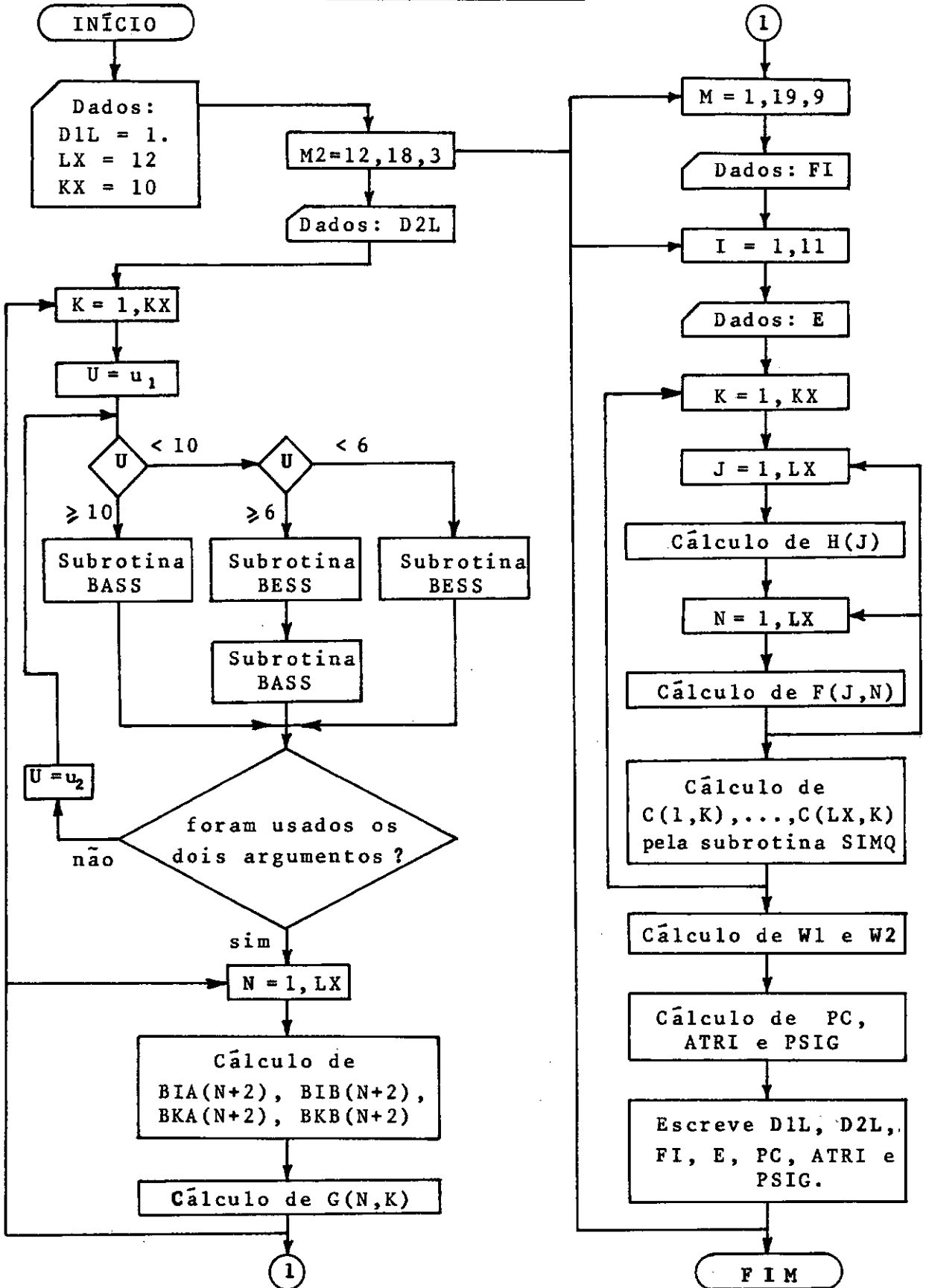
os argumentos $\beta_k \frac{D_1}{L}$ e $\beta_k \frac{D_2}{L}$ e, a seguir, são usadas as relações de recorrência (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) para o cálculo das funções de Bessel de ordens superiores, necessárias à aplicação da equação (4.16). Através desta equação são calculados os termos G_{nk} .

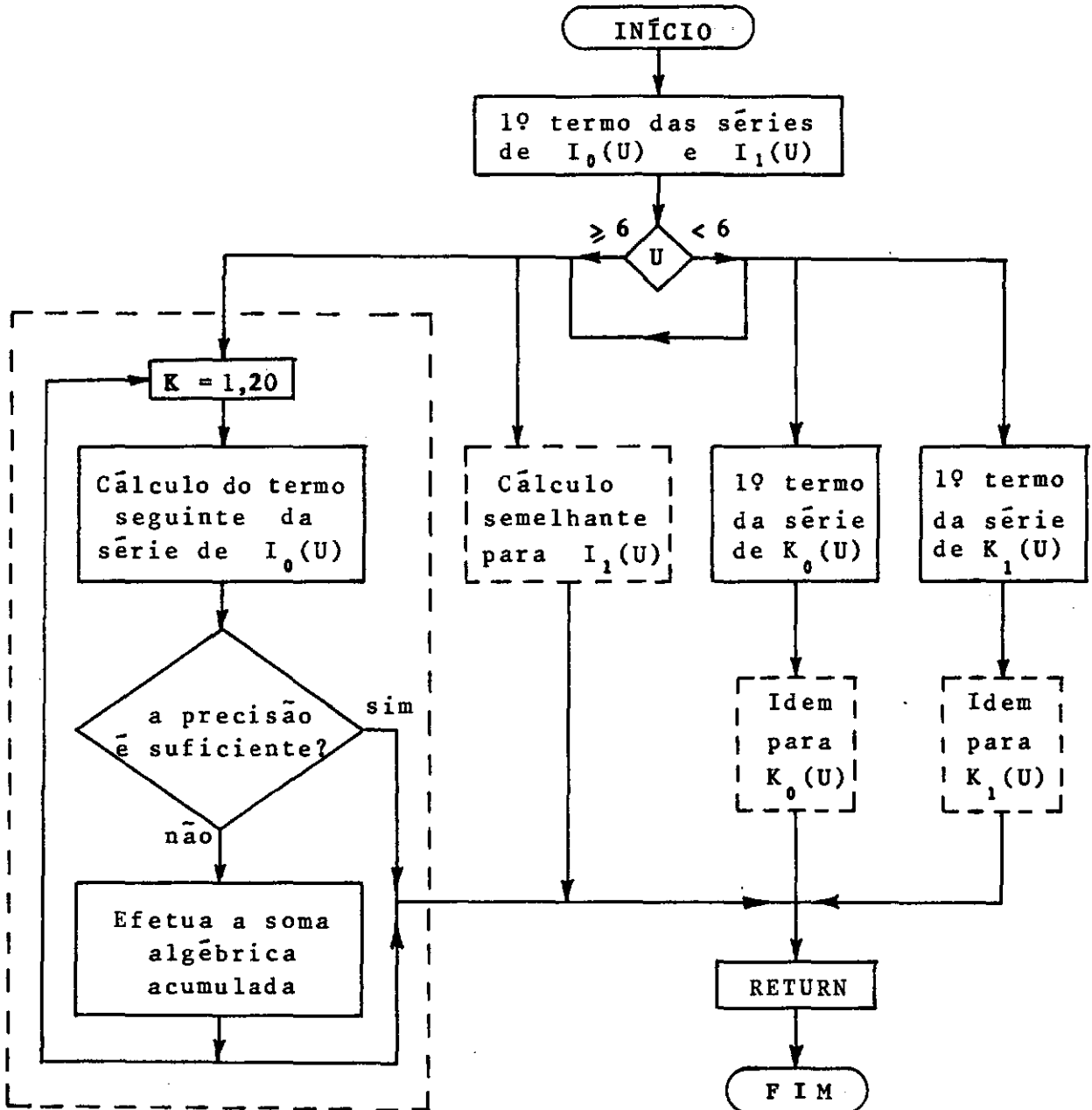
Na segunda etapa, variam-se os índices n e j de 1 até 12, obtendo-se, para cada valor de k , um sistema de 12 equações a 12 incógnitas fornecido pela equação (3.52). Este sistema é resolvido pela subrotina SIMQ, determinando-se então os coeficientes $C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{12k}$. Fazendo-se k variar de 1 a 10, todos os coeficientes C_{nk} são calculados.

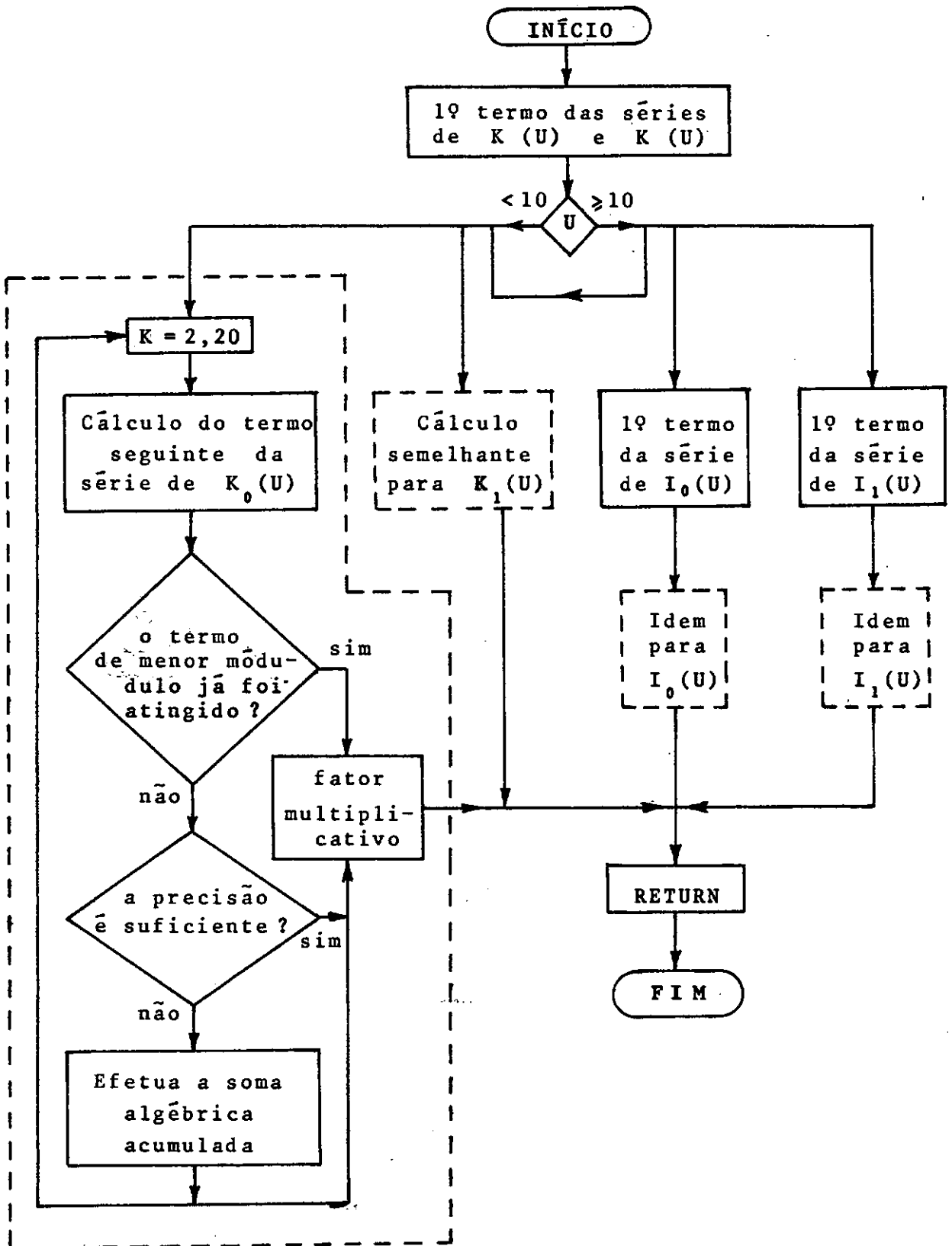
Os valores finais de k e n (o valor final de j é igual ao de n) foram tomados como 10 e 12, respectivamente, pois com essa escolha obteve-se uma precisão satisfatória dentro das faixas de variação de ϵ , ϕ e D_2/L .

Na terceira parte do programa, calculam-se primeiramente as componentes adimensionais da capacidade de carga do mancal, que são funções apenas dos coeficientes C_{nk} (ver equações 3.57 e 3.61). Em seguida, determinam-se os parâmetros de carga e de atrito e o ângulo de atitude, usando-se as equações (3.65), (3.68) e (3.66), respectivamente. Estes resultados são obtidos atribuindo-se valores a cada um dos fatores ϵ , ϕ e D_2/L .

4.2.2 - Diagramas de Fluxo.

PROGRAMA PRINCIPAL

SUBROTINA BESS

SUBROTINA BASS

CAPÍTULO V

RESULTADOS

Os resultados são apresentados em forma de gráficos (Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4), onde estão relacionados os parâmetros de carga, de atrito e de projeto, e o ângulo de atitude do mancal.

Convém salientar que a análise pode ser feita sob vários aspectos, porém, para que seja notada apenas a influência da excentricidade, da capacidade de carga, da permeabilidade e da espessura da matriz porosa, serão consideradas constantes η , N , r_1 , L e c , de forma que as variações de ϵ , ϕ e $\mu(r_1/c)$ resultem, cada uma, na variação de apenas um dos fatores desejados.

A Figura 5.1-A mostra que, para uma mesma razão de excentricidade, os mancais porosos têm menor capacidade de carga do que os mancais sólidos semelhantes, sendo tanto menor quanto maior for a permeabilidade. A diferença é sensível a partir de $\epsilon = 0,5$, tornando-se acentuada para maiores valores de ϵ . Além disso, os mancais porosos têm uma capacidade finita de carga, is

to é, existe um valor crítico do parâmetro de carga para o qual a razão de excentricidade é igual a 1. Este ponto marca aproximadamente a transição do regime hidrodinâmico de lubrificação para lubrificação por camada limite (boundary lubrication). O mesmo não acontece nos mancais sólidos ($\phi = 0.0$), onde teoricamente o parâmetro de carga cresce indefinidamente quando a razão de excentricidade tende à unidade.

Nota-se ainda que a curva de $\phi = 0,001$ difere pouco da curva de $\phi = 0,0$ e, para $\phi = 0,0001$, o mancal comporta-se a proximadamente como se fôsse sólido.

As Figuras 5.1-B e 5.1-C mostram a influência da espessura da matriz porosa para valores constantes da permeabilidade, constatando-se que o parâmetro de carga diminui com o aumento da espessura da matriz porosa. Nota-se também que, para baixos valores da permeabilidade, há pouca influência da espessura da matriz porosa, visto que $D_2/L = 5$ já é um valor demasiadamente elevado para fins práticos. Este fato é importante, pois variando-se a relação D_2/L de 1,2 para 1,37, dobra-se a quantidade de óleo disponível na matriz porosa.

A Figura 5.2 mostra que existe, para cada valor de ϕ , um valor do parâmetro de carga para o qual é mínimo o parâmetro de atrito. Observa-se também que, para carga constante, o parâmetro de atrito aumenta com a permeabilidade, sendo o aumento mais sensível para maiores valores da carga.

As curvas apresentam valores elevados do parâmetro de atrito para pequenos valores do parâmetro de carga, o que se justifica pela equação $\mu = F/W$ (seção 3.8), porém, a força de arrasto se mantém finita.

Para $\phi = 0,0001$ o mancal apresenta valores do parâmetro de atrito muito próximos dos obtidos para mancal sólido.

As figuras 5.3-A e 5.3-B mostram a influência da espessura da matriz porosa para valores constantes da permeabilidade, observando-se que o parâmetro de atrito aumenta com o aumento da espessura da matriz porosa, sendo menos sensível para baixos valores da permeabilidade.

As figuras 5.4-A, 5.4-B e 5.4-C apresentam o ângulo de atitude como função da razão de excentricidade, sendo os gráficos apresentados de tal forma que, se o raio do círculo maior for tomado igual à folga radial (c) do mancal, tem-se a representação do "locus" do eixo, isto é, a curva de deslocamento do centro do eixo com a variação da excentricidade (ou da carga). Tomando-se um ponto qualquer sobre a curva, a linha radial passando por esse ponto representa a linha dos centros para aquele ponto de operação.

Tais figuras mostram que, para uma razão de excentricidade constante, o ângulo de atitude aumenta, tanto com o aumento

to da permeabilidade, como com o aumento da espessura da matriz porosa. Nota-se ainda que, diferentemente dos mancais sólidos, nos quais $\psi \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 1$, os mancais porosos apresentam um certo ângulo de atitude no ponto limite de lubrificação hidrodinâmica.

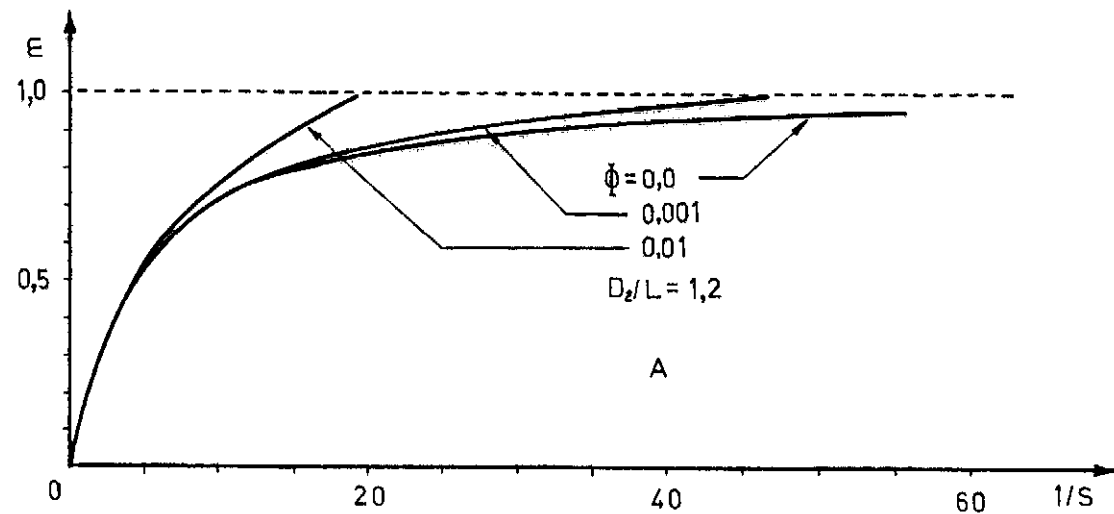
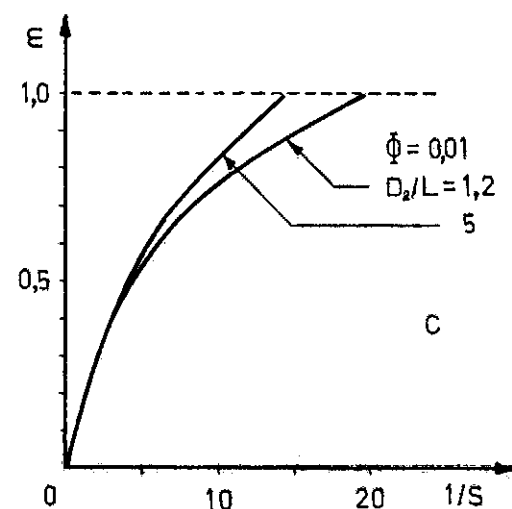
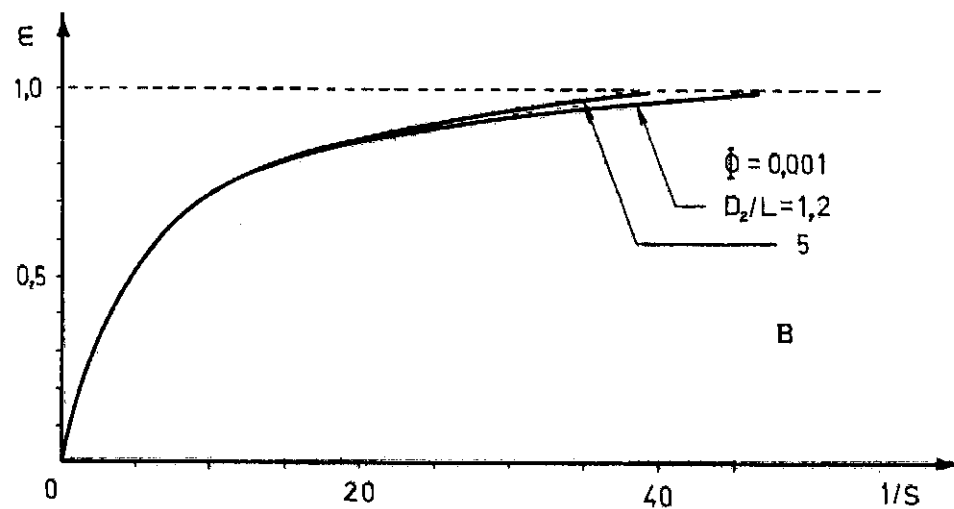


FIG. 5.1 - RAZÃO DE EXCEN-
TRICIDADE EM FUNÇÃO DO
PARAMETRO DE CARGA



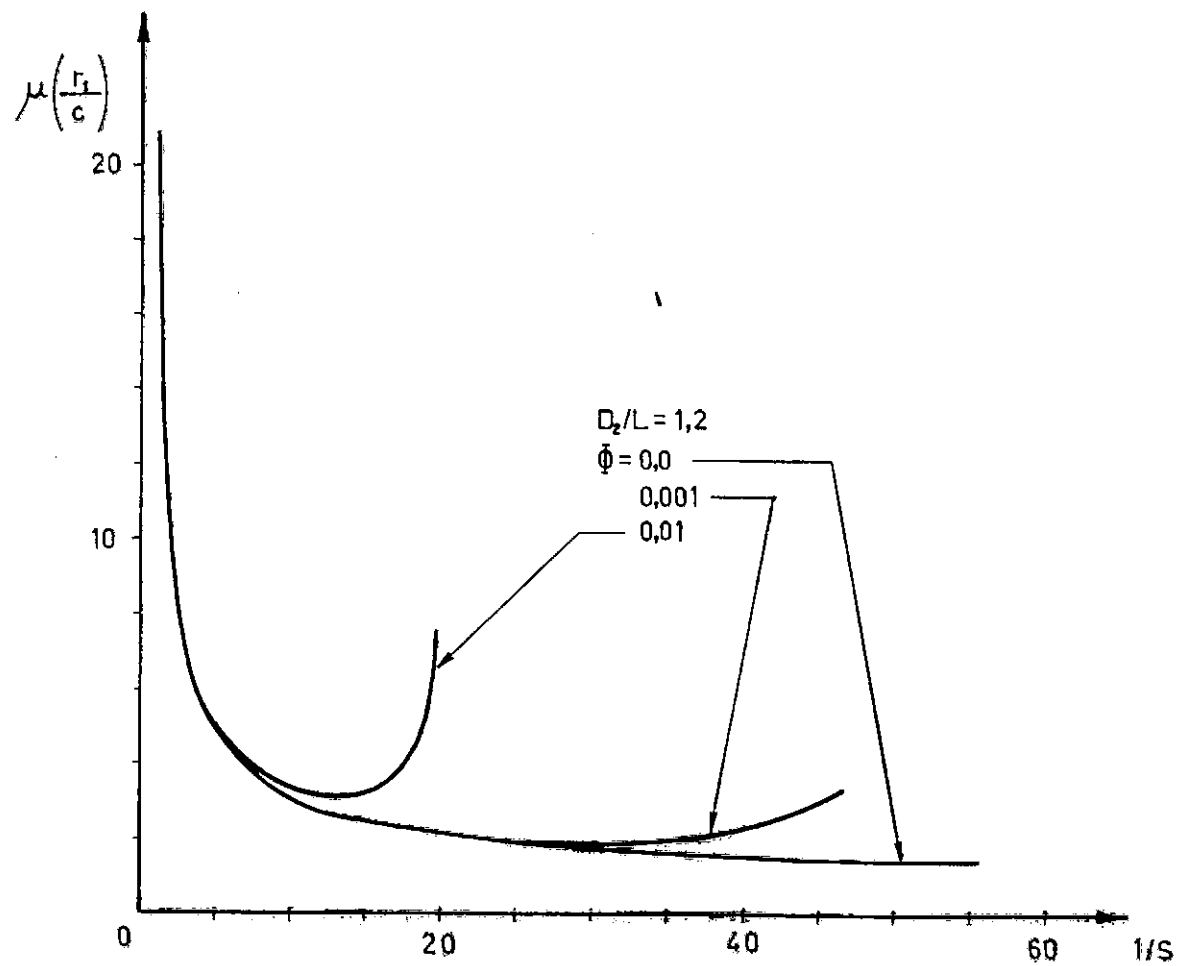


FIG 5.2 - PARAMETRO DE ATRITO EM FUNCAO DO PARAMETRO DE CARGA

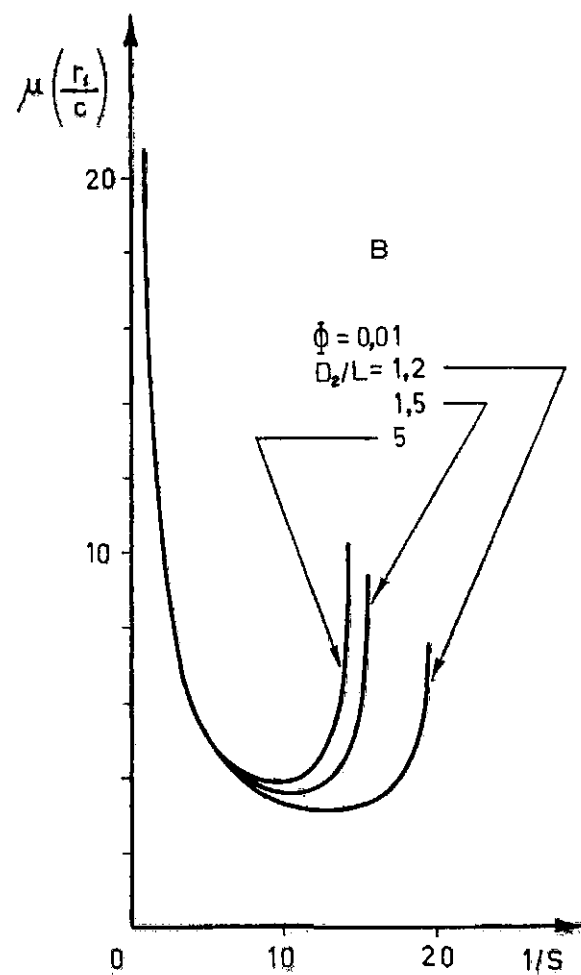
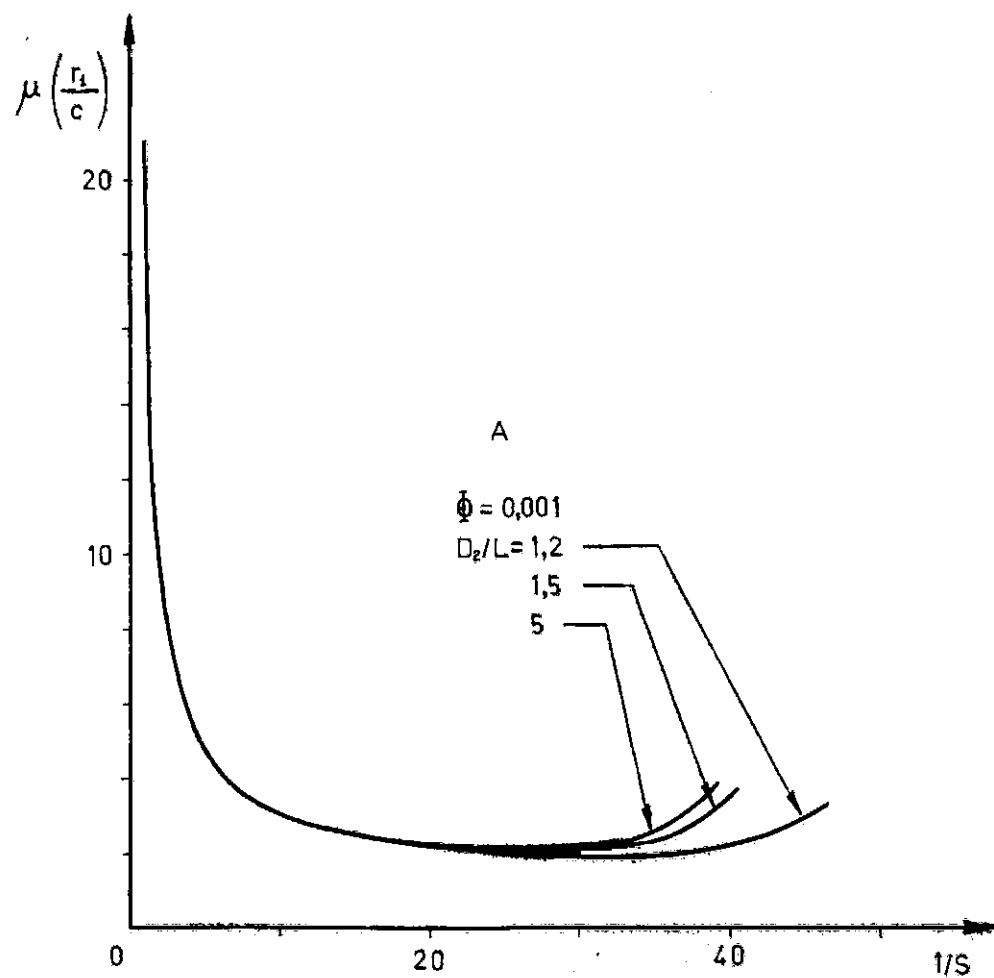


FIG. 5.3 - INFLUÊNCIA DA RELAÇÃO D_2/L SÔBRE O PARÂMETRO DE ATRITO

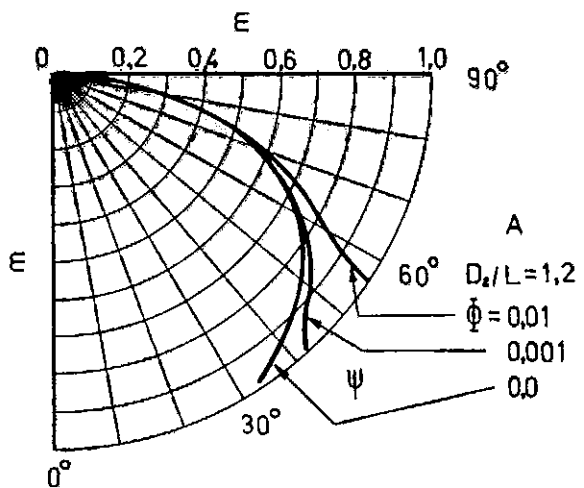
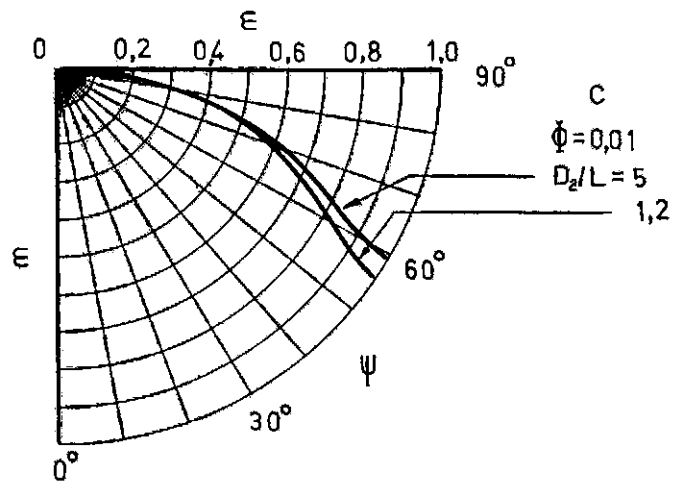
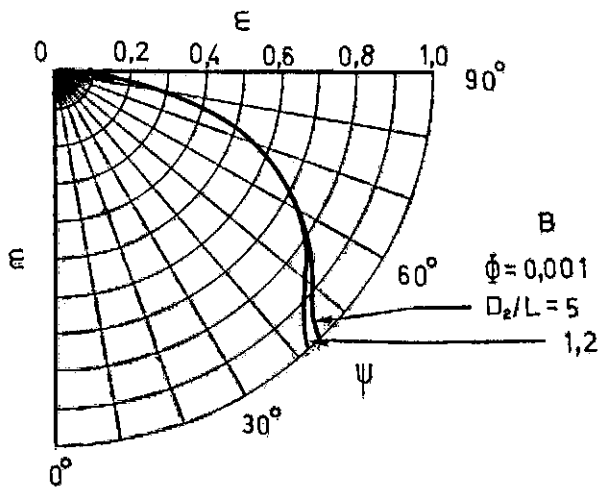


FIG. 5.4 - ÂNGULO DE ATITUDE EM FUNÇÃO DA RAZÃO DE EXCENTRICIDADE



CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

6.1 - VALIDADE DA SOLUÇÃO

A solução analítica obtida, embora aproximada, é de boa precisão para fins práticos.

Resultados mais precisos poderiam ser obtidos, considerando-se a existência de deslizamento entre o óleo e a superfície interna da matriz porosa e, ainda, a variação da viscosidade do lubrificante, porém o trabalho tornar-se-ia excessivamente complicado.

Pode também ser pesquisada uma solução numérica com as condições de contorno de Reynolds:

$$\hat{p}(\theta, z) = \partial \hat{p} / \partial \theta = 0 \quad \text{para} \quad \theta = \theta_1 > \pi$$

tomando-se:

$$\hat{p}(\theta, z) = 0 \quad \text{para} \quad \theta > \theta_1 > 2\pi$$

Com as condições de contorno utilizados neste trabalho, o perfil de pressão é negativo para $\pi > \theta > 2\pi$, o que não se verifica na prática, pois ocorre cavitação e rompimento do filme de óleo. Desprezando-se a parte negativa do perfil de pressão, cria-se uma descontinuidade no fluxo de óleo para $\theta = \pi$, pois à esquerda desse ponto, $\partial \hat{p} / \partial \theta \neq 0$ e à direita, $\partial \hat{p} / \partial \theta = 0$.

A utilização das condições de contorno de Reynolds elimina esta descontinuidade e seu uso já é comum no cálculo de mancais sólidos.

6.2 - APLICABILIDADE DOS RESULTADOS

Da análise dos resultados do capítulo anterior, vê-se claramente que a porosidade afeta negativamente os parâmetros de operação dos mancais, o mesmo acontecendo com o aumento da espessura da matriz porosa.

Porém, devido às inúmeras vantagens práticas já mencionadas, os mancais radiais porosos desempenham um papel importante na lubrificação, sendo seu uso particularmente indicado em locais de difícil acesso nas máquinas ou para simplificar o projeto.

jeto, devido à ausência de dispositivos auxiliares de lubrificação. Outra alternativa é seu uso em substituição aos mancais comuns, devido simplesmente ao seu custo mais baixo, pois como foi visto, para $\phi = 0,0001$ o mancal poroso comporta-se praticamente como se fôsse sólido.

O programa elaborado em linguagem FORTRAN permite, mediante simples acréscimo no número de dados, estender os resultados a uma faixa mais ampla de valores, de modo que os gráficos possam cobrir, com detalhes, toda a faixa usual de relações de dimensões e permeabilidade dos mancais. O projeto de mancais radiais porosos pode, então, ser bastante simplificado mediante o uso desses gráficos.

BIBLIOGRAFIA

1. W.T. ROULEAU - "Hydrodynamic Lubrication of Narrow Press - Fitted Porous Metal Bearings" - Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, March 1963.
2. C. CUSANO - "Lubrication of Porous Journal Bearings", Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, January 1972.
3. V.T. MORGAN - "Porous Metal Bearings", Tribology, May 1969.
4. A. CAMERON - "Principles of Lubrication".
5. PINKUS and STERNLICHT - "Theory of Hidrodynamic Lubrication".
6. R.E. COLLINS - "Flow of Fluids Through Porous Materials".
7. KREIDER, KULLER, OSTBERG e PERKINS - "Introdução à Análise Linear".

8. ERWIN KREYSZIG - "Matemática Superior".
9. N. MC LACHLAN - "Bessel Functions for Engineers".

NOMENCLATURA

c	folga radial: $r_1 - r_{\text{eixo}}$
e	excentricidade.
h	espessura de película do lubrificante.
k	permeabilidade.
p	pressão no meio poroso.
p'	adimensionalização de p: $\frac{c^2}{r_1 \eta U} \cdot p$
\hat{p}	pressão no filme de óleo.
p*	adimensionalização de \hat{p} : $\frac{c^2}{r_1 \eta U} \cdot \hat{p}$
r_1	raio interno da matriz porosa.
r_2	raio externo da matriz porosa.
v	velocidade do fluxo de óleo.
v_0, v_h	componentes de velocidade na direção radial, na superfície interna da matriz porosa e na superfície do eixo, respectivamente.

v_x, v_y, v_z	componentes de velocidade nas direções x, y e z.
D_1	diâmetro interno da matriz porosa.
D_2	diâmetro externo da matriz porosa.
F_d	força de arrasto.
F_p	força devido ao gradiente de pressão.
F_v	força viscosa.
$I_n(u)$	função de Bessel modificada, de primeira espécie, de ordem n.
$K_n(u)$	função de Bessel modificada, de segunda espécie, de ordem n.
L	comprimento do mancal.
N	rotações do eixo por unidade de tempo.
P	carga por unidade de área projetada: $W/(LD_1)$
S	número de Sommerfeld: $\eta N(r_1/c)^2/P$
$1/S$	parâmetro de carga.
U	velocidade tangencial na superfície do eixo.
W	capacidade de carga do mancal.
W_0, W_p	componentes da capacidade de carga na direção da <u>li</u> nha dos centros e perpendicular à linha dos centros, respectivamente.

W_1	adimensionalização de W_0
W_2	adimensionalização de W_p
\bar{z}	adimensionalização de z : $z/(L/2)$.
δ_{ij}	delta de Kronecker.
δ_A	área da seção transversal de um elemento do meio poroso.
δ_s	comprimento do elemento.
$\underline{\delta}_s$	vetor normal à seção transversal do elemento, de módulo igual ao comprimento do mesmo.
∇	operador gradiente: $\frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$
ϵ	razão de excentricidade: e/c
ϕ	porosidade efetiva.
ϕ_t	porosidade total ou absoluta.
Φ	parâmetro de projeto: $r_1 k/c^3$
ψ	ângulo de atitude.
η	viscosidade absoluta.
μ	coeficiente de atrito.
$\mu(r_1/c)$	parâmetro de atrito.

τ	tensão de cisalhamento.
r, θ, z	coordenadas cilíndricas.
x, y, z	coordenadas cartesianas.

A correspondência entre as variáveis utilizadas no texto e as usadas no programa de computador, é a seguinte:

ϕ	FI
ϵ	E
D_1/L	D1L
D_2/L	D2L
β_k	BETA
$u_1 = \beta_k D_1/L$	U
$u_2 = \beta_k D_2/L$	U
$I_n(u_1)$	BIA(n+1)
$I_n(u_2)$	BIB(n+1)
$K_n(u_1)$	BKA(n+1)
$K_n(u_2)$	BKB(n+1)

G_{nk}	$G(N,K)$
H_{kj}	$H(J)$
F_{nkj}	$F(J,N)$
C_{nk}	$C(N,K)$
W_1	$W1$
W_2	$W2$
$1/S$	PC
ψ	$PSI(rd), \quad PSIG(graus)$
$\mu(r_1/c)$	$ATRI.$

APÊNDICE I

Para a obtenção da equação de Laplace (equação 3.5) em coordenadas cilíndricas, faz-se a seguinte mudança de variáveis:

$$x = r.\cos\theta \qquad y = r.\sen\theta$$

Pode-se então escrever:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \cos\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \sen\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -r.\sen\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + r.\cos\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

Estas equações formam um sistema de duas equações a duas incógnitas, cujo determinante vale r .

Logo, para $r \neq 0$, o sistema tem para solução:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \sen\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \qquad (A1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \sin\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (\text{A1.2})$$

Já que estas fórmulas são válidas para qualquer função diferenciável $p(x, y, z)$, podem então ser aplicadas a $\frac{\partial p}{\partial x}$ e $\frac{\partial p}{\partial y}$, resultando:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \cdot \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (\text{A1.3})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{r} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (\text{A1.4})$$

Substituindo-se as equações (A1.1) e (A1.2) nas equações (A1.3) e (A1.4) e levando-se a seguir os resultados para a equação (3.5), obtem-se a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{A1.5})$$

APÊNDICE II

A Figura A2.1 representa um mancal radial, onde os pontos O e C representam os centros do mancal e do eixo, respectivamente.

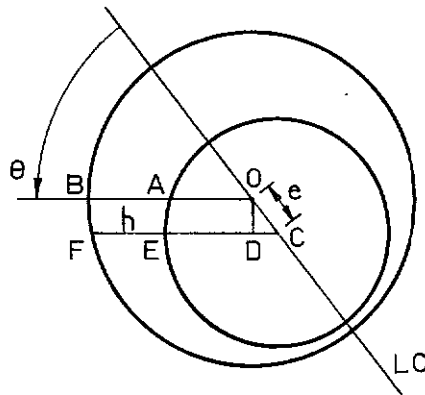


Figura A2.1

A partir de O traça-se uma linha qualquer OB fazendo um ângulo θ com a linha dos centros, pelo ponto C traça-se a linha CF paralela a OB e, em seguida, traça-se uma perpendicular a CF passando pelo ponto O, determinando-se então o ponto D.

Comparadas com OA e CE, as distâncias AB, EF e OC são muito pequenas, de modo que ABFE pode ser considerado um retângulo.

gulo. A espessura de película h pode então ser expressa como:

$$h = EF = OB - DE = OB - (CE - CD) = OB - CE + CD \quad (A2.1)$$

$$\text{Mas, } CD = e \cdot \cos\theta \text{ e } OB - CE = c.$$

Logo, a equação (A2.1) pode ser reescrita na forma:

$$h = c \left[1 + (e/c) \cdot \cos\theta \right]$$

ou,

$$h = c(1 + \epsilon \cdot \cos\theta). \quad (A2.2)$$

APÊNDICE III

```

SUBROUTINE SIMQ(A,B,N,KS)
DIMENSIONA(1),B(1)
TOL=0.0
KS=0
JJ=-N
DO8J=1,N
JY=J+1
JJ=JJ+N+1
BIGA=0
IT=JJ-J
DO2I=J,N
IJ=IT+I
IF(ABS(BIGA)-ABS(A(IJ)))1,2,2
1  BIGA=A(IJ)
   IMAX=I
2  CONTINUE
   IF(ABS(BIGA)-TOL)3,3,4
3  KS=1
   RETURN
4  I1=J+N*(J-2)
   IT=IMAX-J
   DO5K=J,N
   I1=I1+N
   I2=I1+IT
   SAVE=A(I1)
   A(I1)=A(I2)
   A(I2)=SAVE
5  A(I1)=A(I1)/BIGA
   SAVE=B(IMAX)
   B(IMAX)=B(J)
   B(J)=SAVE/BIGA
   IF(J-N)6,9,6
6  IQS=N*(J-1)
   DO8IX=JY,N
   IXJ=IQS+IX
   IT=J-IX
   DO7JX=JY,N
   IXJX=N*(JX-1)+IX
   JJX=IXJX+IT
7  A(IXJX)=A(IXJX)-(A(IXJ)*A(JJX))
8  B(IX)=B(IX)-(B(J)*A(IXJ))
9  NY=N-1
   IT=N*N
   DO10J=1,NY
   IA=IT-J
   IB=N-J
   IO=N
   DO10K=1,J
   B(IB)=B(IB)-A(IA)*B(IO)
   IA=IA-N
10 IO=IO-1
   RETURN
END
SUBROUTINE BASS(BI1,BI2,BK1,BK2,U)
PI=3.141593
DIF=1.E-6

```

```

M=1
LK1=0
LK2=0
P=1.
Q=1.
BK1=1.
BK2=1.
IF(U-10.)2,1,1
1  LI1=0
   LI2=0
   BI1=1.
   BI2=1.
2  DO21K=2,20
   AK=K
   M=-M
   T1=P
   T2=Q
   P=P*(2.*AK-3.)*2/((AK-1.)*8.*U)
   Q=Q*(4.-(2.*AK-3.)*2)/((AK-1.)*8.*U)
   IF(LK1)3,3,6
3  IF(ABS(T1)-ABS(P))5,5,4
4  S=BK1
   BK1=BK1+P*M
   IF(ABS((BK1-S)/S)-DIF)5,5,6
5  LK1=1
6  IF(LK2)7,7,10
7  IF(ABS(T2)-ABS(Q))9,9,8
8  S=BK2
   BK2=BK2+Q
   IF(ABS((BK2-S)/S)-DIF)9,9,10
9  LK2=1
10 IF(U-10.)11,12,12
11 IF(LK1+LK2-2)21,23,23
12 IF(LI1)13,13,16
13 IF(ABS(T1)-ABS(P))15,15,14
14 S=BI1
   BI1=BI1+P
   IF(ABS((BI1-S)/S)-DIF)15,15,16
15 LI1=1
16 IF(LI2)17,17,20
17 IF(ABS(T2)-ABS(Q))19,19,18
18 S=BI2
   BI2=BI2+Q*M
   IF(ABS((BI2-S)/S)-DIF)19,19,20
19 LI2=1
20 IF(LK1+LK2+LI1+LI2-4)21,22,22
21 CONTINUE
   IF(U-10.)23,22,22
22 AUXI=EXP(U)/SQRT(2.*PI*U)
   BI1=BI1*AUXI
   BI2=BI2*AUXI
23 AUXK=EXP(-U)*SQRT(0.5*PI/U)
   BK1=BK1*AUXK
   BK2=BK2*AUXK
   RETURN
   END

```

```

SUBROUTINE BESS(BI1,BI2,BK1,BK2,U)
DIF=1.E-6
FK=1.
LI1=0
LI2=0
BI1=1.
BI2=0.5*U
IF(U-6.)1,2,2
1  LK1=0
   LK2=0
   PSI=-0.5772156
   BK1=-ALOG(0.5*U)+PSI
   BK2=1./U+0.5*U*(ALOG(0.5*U)-PSI-0.5)
2  DO17K=1,20
   AK=K
   FK=FK*AK
   AUX=((0.5*U)**K/FK)**2
   IF(LI1)3,3,5
3  T=BI1
   BI1=BI1+AUX
   IF(ABS((BI1-T)/T)-DIF)4,4,5
4  LI1=1
5  IF(LI2)6,6,8
6  T=BI2
   BI2=BI2+AUX*0.5*U/(AK+1.)
   IF(ABS((BI2-T)/T)-DIF)7,7,8
7  LI2=1
8  IF(U-6.)9,16,16
9  PSI=PSI+1./AK
   IF(LK1)10,10,12
10 T=BK1
   BK1=BK1-AUX*(ALOG(0.5*U)-PSI)
   IF(ABS((BK1-T)/T)-DIF)11,11,12
11 LK1=1
12 IF(LK2)13,13,15
13 T=BK2
   BK2=BK2+AUX*0.5*U/(AK+1.)*(ALOG(0.5*U)-PSI-0.5/(AK+1.))
   IF(ABS((BK2-T)/T)-DIF)14,14,15
14 LK2=1
15 IF(LI1+LI2+LK1+LK2-4)17,18,18
16 IF(LI1+LI2-2)17,18,18
17 CONTINUE
18 RETURN
END
DIMENSION BIA(14),BIB(14),BKA(14),BK8(14),G(12,10),H(12),F(
12,12),C(12,10)
PI=3.141593
LX=12
KX=10
D1L=1.
IU=0
DO54M2=12,18,3
D2L=0.1*M2
IF(M2-18)2,1,2
1  D2L=5.
2  WRITE(5,3)

```

```

3  FORMAT(1X,'D1/L',3X,'D2/L',5X,'FI',7X,'E',4X,'PARAMETRO D',
   'E CARGA',3X,'PARAMETRO DE ATRITO',3X,'ANGULO DE ATITUDE ',
   '(GRAUS)',/,1X,99(' - '))
C  CALCULO DOS COEFICIENTES G(N,K)
   DO17K=1,KX
   BETA=(K-0.5)*PI
   U=BETA*D1L
   IND=0
4  IF(IND)6,6,5
5  U=BETA*D2L
6  IF(U-10.)7,11,11
7  IF(IND)8,8,9
8  CALL BESS(BIA(1),BIA(2),BKA(1),BKA(2),U)
   GO TO 10
9  CALL BESS(BIB(1),BIB(2),BKB(1),BKB(2),U)
10 IF(U-6.)14,11,11
11 IF(IND)12,12,13
12 CALL BASS(BIA(1),BIA(2),BKA(1),BKA(2),U)
   GO TO 14
13 CALL BASS(BIB(1),BIB(2),BKB(1),BKB(2),U)
14 IF(IND)15,15,16
15 IND=1
   GO TO 4
16 DO17N=1,LX
   BIA(N+2)=BIA(N)-2.*N/(BETA*D1L)*BIA(N+1)
   BIB(N+2)=BIB(N)-2.*N/U*BIB(N+1)
   BKA(N+2)=BKA(N)+2.*N/(BETA*D1L)*BKA(N+1)
   BKB(N+2)=BKB(N)+2.*N/U*BKB(N+1)
17 G(N,K)=BETA*((BIA(N)+BIA(N+2))*(BKB(N)+BKB(N+2))-(BIB(N) +
   BIB(N+2))*(BKA(N)+BKA(N+2)))/(BIA(N+1)*(BKB(N)+BKB(N+2)) +
   (BIB(N)+BIB(N+2))*BKA(N+1))
C  CALCULO DOS COEFICIENTES C(N,K)
   DO54M=1,19,9
   WRITE(5,18)
18  FORMAT(1X,99(' - '))
   FI=M*0.001
   IF(M-19)21,19,21
19  IF(IU)54,20,54
20  FI=0.0
   IU=1
21  II=0
   DO54I=1,11
   E=0.1*I
   IF(I-9)25,25,22
22  IF(II)23,23,24
23  E=0.95
   II=1
   GO TO 25
24  E=0.99
25  MEN1=-1
   DO50K=1,KX
   MEN1=-1*MEN1
   BETA=(K-0.5)*PI
   DO46J=1,LX
C  CALCULO DOS TERMOS INDEPENDENTES H(J)
   IF(J-1)26,26,27

```

```

26  H(J)=24.*E*MEN1/(2.*K-1.)
    GO TO 28
27  H(J)=0.
28  DO46N=1,LX
C   CALCULO DOS COEFICIENTES F(J,N)
    F(J,N)=0.
    V=(N**2+(D1L*BETA)**2)*PI
    IF(N-J)32,29,38
29  F(J,N)=F(J,N)+V*(1.+1.5*E**2)-6.*PI*D1L*FI*G(N,K)
    IF(N-1)30,30,31
30  F(J,N)=F(J,N)+(1.5*PI-0.75*V)*E**2
31  GO TO 46
32  IF(J-N-1)33,33,34
33  F(J,N)=F(J,N)+0.5*(3.*E+0.75*E**3)*(V+N*PI)
    GO TO 44
34  IF(J-N-2)35,35,36
35  F(J,N)=F(J,N)+(0.75*V+1.5*N*PI)*E**2
    GO TO 46
36  IF(J-N-3)37,37,46
37  F(J,N)=F(J,N)+0.125*(V+3.*N*PI)*E**3
    GO TO 46
38  IF(N-J-1)39,39,40
39  F(J,N)=F(J,N)+0.5*(3.*E+0.75*E**3)*(V-N*PI)
    GO TO 44
40  IF(N-J-2)41,41,42
41  F(J,N)=F(J,N)+(0.75*V-1.5*N*PI)*E**2
    GO TO 46
42  IF(N-J-3)43,43,46
43  F(J,N)=F(J,N)+0.125*(V-3.*N*PI)*E**3
    GO TO 46
44  IF(N+J-3)46,45,46
45  F(J,N)=F(J,N)+0.125*(3.*N*PI-V)*E**3
46  CONTINUE
C   RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES (PARA CADA VALOR DE K) A-
C   TRAVES DA SUBROTINA SIMQ PARA O CALCULO DOS COEFICIENTES
C   C(N,K)
    CALL SIMQ(F,H,LX,KS)
    IF(KS)47,49,47
47  WRITE(5,48)
48  FORMAT(/,10X,'MATRIZ SINGULAR')
    GO TO 55
49  DO50N=1,LX
50  C(N,K)=H(N)
C   CALCULO DAS COMPONENTES ADIMENSIONAIS DA CAPACIDADE DE CAR-
C   GA DO MANCAL
    W1=0.
    W2=0.
    MEN1=-1
    DO51K=1,KX
    MEN1=-1*MEN1
    W2=W2+C(1,K)*MEN1/(2.*K-1.)
    DO51N=2,LX,2
51  W1=W1+C(N,K)*MEN1*N/((2.*K-1.)*(N**2-1.))
    W1=-W1*PI/4.
C   CALCULO DO PARAMETRO DE CARGA ( PC=1/S )
    PC=PI*SQRT(W1**2+W2**2)

```

```

C   ANGULO DE ATITUDE EM RADIADOS (PSI) E EM GRAUS (PSIG)
    PSI=ATAN(W2/W1)
    PSIG=180.*PSI/PI
C   PARAMETRO DE ATRITO
    ATRI=0.5*E*SIN(PSI)+2.*PI**2/(SQRT(1.-E**2)*PC)
    WRITE(5,52)D1L,D2L,FI,E,PC,ATRI,PSIG
    WRITE(5,53)
52  FORMAT(1X,F4.2,' I ',F4.2,' I ',F6.4,' I ',F4.2,1X,'I',6X ,
    F6.2,8X,'I',7X,F6.2,8X,'I',6X,F6.2,14X,'I')
53  FORMAT(1X,5(' - '), 'I',6(' - '), 'I',8(' - '), 'I',6(' - '), 'I', 20(
    ' - '), 'I',21(' - '), 'I',26(' - '), 'I')
54  CONTINUE
55  STOP
    END

```